Wykład z analizy

TYDZIEŃ 21.

WZÓR TAYLORA

ĆWICZENIA

c21.1 (a) Niech $F(x) = 2x + 1$, $G(x) = 3x - 4$, znaleźć wszystkie liczby ξ , $1 < \xi < 3$ takie, że $\frac{F(3)-F(2)}{G(3)-G(2)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$,
(b) Niech $F(x) = 1/x$, $G(x) = x^2$, znaleźć wszystkie liczby ξ , $1 < \xi < 2$ takie, że $\frac{F(2)-F(1)}{G(2)-G(1)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$,
(c) Niech $F(x) = \log x$, $G(x) = 1/x$, znaleźć wszystkie liczby ξ , $1 < \xi < e$ takie, że $\frac{F(e)-F(1)}{G(e)-G(1)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$,
(d) Niech $F(x) = \sqrt{x^2 + 9}$, $G(x) = x^2 + 1$, znaleźć wszystkie liczby ξ , $0 < \xi < 4$ takie, że $\frac{F(4)-F(0)}{G(4)-G(0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$.

c21.2 Używając liniowej aproksymacji znaleźć przybliżone wartości i oszacować błąd:
(a) $\sqrt{50}$, (b) $\log(0,98)$, (c) $\cos(0,01)$, (d) $e^{-0,01}$.

c21.3 Dla funkcji podanych poniżej znaleźć wszystkie wartości ξ pomiędzy x_0 i x_1 takie, że

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x_1 - x_0)^2.$$

(a) $f(x) = x^3,\ x_0 = 1,\ x_1 = 1/2$,
(b) $f(x) = 1/x,\ x_0 = 1,\ x_1 = 1/8$,
(c) $f(x) = \log x,\ x_0 = 1,\ x_1 = e$.

c21.4 Używając przybliżenia wielomianem kwadratowym znaleźć wartości i oszacować błąd:
(a) $\sqrt{50}$, (b) $(0,025)^{1/3}$, (c) $\cos(0,01)$, (d) $e^{-0,01}$.

c21.5 (a) Znaleźć trzeci wielomian Taylora funkcji $x \to 1/(1 + x)$ w punkcie $x_0 = 0$,
(b) Znaleźć czwarty wielomian Taylora funkcji $x \to (1 + x)^{4/3}$ w punkcie $x_0 = 0$,
(c) Znaleźć czwarty wielomian Taylora funkcji $x \to \cos x$ w punkcie $x_0 = 0$.

ZADANIA

z21.1 Dla funkcji podanych poniżej znaleźć wartości ξ pomiędzy x_0 i x_1 takie, że

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)(x_1 - x_0)^3.$$

(a) $f(x) = x^3,\ x_0 = 1,\ x_1 = \frac{1}{2}$,
(b) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 1,\ x_1 = \frac{1}{8}$,
(c) $f(x) = \log x,\ x_0 = 1,\ x_1 = e$.

z21.2 (a) Znaleźć trzeci wielomian Taylora funkcji $x \to \log(x^2 + 1)$ w punkcie $x_0 = 0$,
(b) Znaleźć czwarty wielomian Taylora funkcji $x \to \log^2 x$ w punkcie $x_0 = 1$,
(c) Znaleźć trzydziesty pierwszy wielomian Taylora funkcji $x \to \int_0^x \operatorname{arctg} u^{10} du$ w punkcie $x_0 = 0$.

z21.3 Oszacować wartość bezwzględną reszty we wzorze Taylora $R(x) = f(x) - P(x)$.
(a) $f(x) = x^4$, $P(x)$ jest trzecim wielomianem Taylora w punkcie $x_0 = 0$, $x = 1/2$,
(b) $f(x) = x^{13/3}$, $P(x)$ jest trzecim wielomianem Taylora w punkcie $x_0 = 0$, $x = 1/2$,
(c) $f(x) = \cos x$, $P(x)$ jest piątym wielomianem Taylora w punkcie $x_0 = \pi/2$, $3\pi/8 \leqslant x \leqslant 5\pi/8$,
(d) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $P(x)$ jest trzecim wielomianem Taylora w punkcie $x_0 = 0$, $-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2$.