Wykład z analizy

Tydzień 22.

Zastosowania wzoru Taylora

Ćwiczenia

c22.1 Udowodnić (a) $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$,
(b) $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$,
(c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,
(d) $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$.

c22.2 Obliczyć używając wzoru z 22.3. przy zadanym n i oszacować błąd: (a) $\sqrt[3]{0,97} \quad n = 3$,
(b) $\sqrt[3]{1,02} \quad n = 3$,
(c) $\sqrt[5]{0,98} \quad n = 3$,
(d) $(1,1)^{1,1} \quad n = 3$,
(e) $\sqrt{1.4} \quad n = 4$.

c22.3 Znaleźć n-ty wielomian Taylora oraz resztę funkcji f w punkcie $x_0 = 0$: (a) $f : x \to \frac{1}{1+x^{10}}$,
(b) $f : x \to \frac{1}{1-x^8}$,
(c) $f : x \to \frac{x^2}{1+x}$,
(d) $f : x \to \frac{x^3}{1+x^5}$.

c22.4 Używając metody opisanej w 22.7. znaleźć przybliżenie wartości logarytmu przy zadanym m i oszacować błąd: (a) $\log \frac{3}{2} \quad m = 1$,
(b) $\log 3 \quad m = 2$,
(c) $\log \frac{5}{4} \quad m = 1$.

c22.5 Używając metody opisanej w 22.8. znaleźć przybliżenie wartości arctg przy zadanym n i oszacować błąd: (a) $\operatorname{arctg} \frac{1}{5} \quad n = 2$,
(b) $\operatorname{arctg} \frac{1}{7} \quad n = 2$,
(c) $\operatorname{arctg} \frac{1}{8} \quad n = 2$,
(d) $\operatorname{arctg} 1 \quad n = 5$.

Zadania

z22.1 Udowodnić $\sum_{k=0}^{m} k\binom{m}{k} = m2^{m-1}$.

z22.2 Znaleźć n-ty wielomian Taylora funkcji $x \to (a + x)^\alpha$ w punkcie $x_0 = 0$ dla $\alpha \neq 0$, $a > 0$ oraz resztę $R_{n+1}(x)$.

z22.3 Obliczyć liczbę π z dokładnością $0,001$ używając wzorów (9) lub (11). Podać podobne wzory do (11) iterując wzór na tangens sumy.

z22.4 Udowodnić, że e^2 nie jest liczbą wymierną. Czy istnieje k takie, że dla pewnej liczby wymiernej w $e = \sqrt[k]{w}$?