Wykład z analizy

TYDZIEŃ 23.

CIĄGI

ĆWICZENIA

c23.1 Wypisać 6 pierwszych wyrazów następujących ciągów: (a) $a_n = n^2 - n \quad n = 1, 2, \ldots,$
(b) $k_b = b^2 - b \quad b = 0, 1, \ldots,$ (c) $a_\lambda = (-1)^\lambda (\lambda - 1)^3 \quad \lambda = 1, 2, \ldots,$
(d) $n_j = \frac{j}{j^2+1}, \quad j = 0, 1, \ldots,$ (e) $b_k = (-2)^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$
(f) $x_1 = 1, x_2 = 2, \quad x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2},$ (g) $a_r = \frac{2r+1}{2r}, \quad r = 5, 6, \ldots.$

c23.2 (a) Podać przykład ciągu zbieżnego do 0 mającego nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i nieskończenie wiele wyrazów ujemnych.
(b) Czy ciąg $a_n = \sin n$ jest zbieżny? Uzasadnić.
(c) Czy istnienie granicy $\lim_{n\to+\infty} a_{n+m_0}$ pociąga istnienie granicy $\lim_{n\to+\infty} a_n$?

c23.3 (a) Udowodnić, że ciąg $a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots$ jest zbieżny do 1.
(b) Udowodnić, że ciąg $e_j = \frac{1}{\sqrt{j}}, \quad j = 1, 2, \ldots$ jest zbieżny do 0.
(c) Udowodnić, że $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n}} = 2.$

c23.4 W następujących przykładach rozstrzygnąć czy ciąg jest zbieżny do granicy skończonej, rozbieżny do $+\infty$ lub $-\infty$, czy też nie ma granicy skończonej ani nieskończonej. W przypadku gdy granica istnieje znaleźć tę granicę. (a) $a_n = \frac{2n^3-n}{3n^3+n^2+1} \quad n = 0, 1, \ldots,$
(b) $a_n = \frac{1-2n^2}{1+n-n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$ (c) $u_n = \frac{n^3-3n+4}{n^2+n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$
(d) $u_l = \frac{l!+1}{l!-1}, \quad l = 2, 3, \ldots.$ (e) $a_n = \frac{(n+3)!-n!}{(n+4)!}, \quad n = 0, 1, \ldots,$
(f) $c_j = \frac{8^j-4^j}{3^j}, \quad j = 1, 2, \ldots.$

c23.5 Znaleźć kres górny i kres dolny następujących zbiorów: (a) $\{x : 1 - (\frac{1}{2})^n < x < 2 - (\frac{1}{2})^{2n}, \quad \forall_{n=1,2,\ldots}\},$
(b) $\{x : 0 < x, x^2 \leq 2\},$
(c) $\{\frac{x^2+1}{x^2-1} : x \in \mathbf{R}\}.$

c24.6 Podać, które z ciągów $a_n \quad n = 1, 2, \ldots$ są rosnące, niemalejące, nierosnące czy malejące, ograniczone, zbieżne. W przypadku ciągów zbieżnych znaleźć $\lim_{n\to+\infty} a_n$, w przypadku ograniczonych znaleźć $\sup\{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$ i $\inf\{a_n : n = 1, 2, \ldots\}$. (a) $a_n = \frac{2n-1}{3n+4}$
(b) $a_n = \frac{n^2+1}{n^2+n},$
(c) $a_n = \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)},$
(d) $a_n = \frac{n}{\log n!}.$

ZADANIA

z23.1 Udowodnić, że jeśli zbiór A jest ograniczony od góry, to istnieje ciąg niemalejący $a_n, \quad n = 1, 2, \ldots$ elementów zbioru A taki, że $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup A$.

z23.2 Udowodnić jedyność kresu górnego zbioru oraz udowodnić istnienie i jedyność kresu dolnego zbioru ograniczonego od dołu.

z23.3 Sformułować i udowodnić twierdzenie 23.18. dla ciągów nierosnących.

z23.4 Udowodnić następujące twierdzenie

Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. *Jeśli $a_n \quad n = 0, 1, \ldots$ jest ciągiem ograniczonym, to zawiera on podciąg zbieżny.*

Wskazówka. Ponieważ ciąg jest ograniczony, więc istnieje liczba całkowita u_0 taka, że przedział $I_0 = (u_0, u_0 + 1]$ zawiera nieskończenie wiele elementów ciągu, w przedziale I_0 istnieje przedział

$$I_1 = (u_0 + \frac{u_1}{10}, u_0 + \frac{u_1+1}{10}] \quad 0 \leqslant u_1 \leq 9,$$

który zwiera nieskończenie wiele elementów ciągu, w przedziale I_1 istnieje przedział

$$I_2 = (u_0 + \frac{u_1}{10} + \frac{u_2}{10^2}, u_0 + \frac{u_1}{10} + \frac{u_2+1}{10^2}] \quad 0 \leqslant u_2 \leqslant 9$$

który zwiera nieskończenie wiele elementów ciągu i tak dalej. Wybieramy po jednym elemencie ciągu z każdego z przedziałów I_0, I_1, $I_2, \ldots,$ i otrzymujemy podciąg zbieżny do liczby $u_0, u_1 u_2 \ldots.$