Wykład z analizy

Tydzień 24.

Ciągi, szeregi

Ćwiczenia

c24.1 Udowodnić: (a) $\forall_n \quad a_n \geqslant M \to \lim_{n\to+\infty} a_n \geqslant M$,
(b) ciąg a_n, gdzie $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ spełnia warunek Cauchy'ego
(c) jeśli ciąg α_n jest malejący i ograniczony, to jest zbieżny,
(d) jeśli wszystkie wyrazy ciągu α_n są większe od zera i ciąg jest nierosnący, to jest zbieżny i jego granica jest nieujemna.
c24.2 Podać przykład (a) ciągu, który jest ograniczony i nie jest zbieżny,
(b) ciągu, który jest ograniczony, nie jest zbieżny i ma podciąg zbieżny do zera,
(d) funkcji, której zbiór wartości A na przedziale $(0,1)$ jest ograniczony, ale nie ma punktu $a \in (0,1)$ takiego, że $f(a) = \sup A$.
c24.3 Znaleźć ciąg rosnący α_n, taki, że $\lim_{n\to+\infty} \cos(a_n) = 1$.
c24.4 Udowodnić, że $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.
c24.5 (a) Udowodnić, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ nie jest zbieżny.
(b) Korzystając ze wzoru Taylora udowodnić, że szereg $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny.

Zadania

z24.1 Udowodnić, że funkcja ciągła na przedziale domkniętym przyjmuje swoje minimum.
z24.2 Udowodnić, że szereg $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ jest zbieżny dla $|x| < 1$. Obliczyć $\sum_{k=0}^{\infty}(1/2)^k$.
z24.3 Czy istnieje ciąg $\{a_n\}$ taki, że (podać przykład lub dowieść, że nie istnieje): (a) $a_n > \frac{1}{n}$ dla nieskończenie wielu n, $\forall_{n\in\mathbf{N}} \quad a_n > 0$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
(b) $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla nieskończenie wielu n, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
(c) $\forall_{n\in\mathbf{N}} \quad a_{n^2} = 1/n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.
(d) $\forall_{n\in\mathbf{N}} \quad a_n \in \mathbf{Z}$, $a_n = n$ dla $n \leqslant 100$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
(e) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny
z24.4 Udowodnić, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.