Wykład z analizy

Tydzień 25.

Szeregi

Ćwiczenia

c25.1 Znaleźć szereg, którego n-ta suma częściowa jest równa: (a) $\frac{n}{n+1}$, (b) $\frac{2^n}{n!}$.

c25.2 Znaleźć n-ty wielomian Taylora $P_n(x)$ funkcji f w punkcie x_0 i znaleźć szereg $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, którego n-ta suma częściowa jest równa $P_n(x)$. Czy znaleziony szereg jest zbieżny w każdym punkcie?
(a) $f(x) = e^{x^2},\ x_0 = 0$, (b) $f(x) = \cos x^3,\ x_0 = 0$.

c25.3 Rozstrzygnąć, który z podanych szeregów jest zbieżny, a który rozbieżny:
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-1}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n+1}\right)$.

c25.4 Który z podanych niżej szeregów jest zbieżny, a który rozbieżny. W przypadku szeregu zbieżnego znaleźć jego sumę: (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(10^{-n} + 9^{-n})$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(10^{-n} + 2^n)$,
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^{n/3},\ |x| < 1$, (d) $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j t^{j/2},\ 0 \leqslant t < 1$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n,\ |z| < 1$,
(f) $\sum_{n=0}^{\infty} u^n(1+u^n),\ |u| < 1$, (g) $\sum_{j=0}^{\infty} x^j \cos\frac{j\pi}{2},\ |x| < 1$, (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} x,\ |x| < \frac{\pi}{2}$.

Zadania

z25.1 Znaleźć n-ty wielomian Taylora $P_n(x)$ funkcji f w punkcie x_0 i znaleźć szereg $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, którego n-ta suma częściowa jest równa $P_n(x)$
(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ x_0 = 1$,
(b) $f(x) = x^{-1/3},\ x_0 = 1$,
(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}},\ x_0 = 1$.

z25.2 Który z podanych niżej szeregów jest zbieżny, a który rozbieżny. W przypadku szeregu zbieżnego znaleźć jego sumę: (a) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{\sin j}$,
(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos\frac{n\pi}{2}$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log\frac{n}{n+2}$, **Wskazówka:** Zapisać $\log\frac{n}{n+2} = \log\frac{n}{n+1} + \log\frac{n+1}{n+2}$,
(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$.

z25.3 Używając testów na zbieżność szeregów zbadać zbieżność następujących szeregów:
(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{2^n}$, (b) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2+\cos j}{j}$, (c) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3^j - \sin j}$, (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{2^n}$,
(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!-n}$, (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\log(n+2)}$ (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(\log(n+2))^2}$, (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$,
(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\log^l(n+2)}$ $\quad l > 0$ (rozwiązanie zależy od l), (j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n+2)}$,
(k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$, (l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$, (m) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\operatorname{arctg}(n+1)$, (n) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$.

z25.4 Które z podanych szeregów są zbieżne, które bezwzględnie zbieżne, a które rozbieżne:
(a) $\sum_{n=0}^{\infty} p^n \quad |p| < 1$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{3/2}}$, (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n}$,
(e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-n}$, (f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\log n}$, (g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\log^2 n}$.