Wykład z analizy

Tydzień 26.

Funkcje analityczne

Ćwiczenia

c26.1 Znaleźć promień zbieżności następujących szeregów: (a) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1}x^n$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n}x^n$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}(x-1)^n$,
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}(x+2)^n$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}x^n$.
Wskazówka: Zastosować kryterium ilorazowe do zbadania zbieżności czy rozbieżności odpowiednich szeregów.

c26.2 Znaleźć szereg Taylora funkcji $f(x)$ wokół danego punktu x_0 i promień zbieżności znalezionego szeregu: (a) $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $x_0 = 1$, (b) $f(x) = x^{2/3}$, $x_0 = 1$,
(c) $f(x) = x^{-1/4}$, $x_0 = 16$, (d) $f(x) = 1/(2-x)^2$, $x + 0 = 0$,
(e) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x_0 = 0$, (f) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi/6$,
(g) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$, (h) $f(x) = x^4/(1-x)$, $x_0 = 0$,
(i) $f(x) = e^{x^2}$, $x_0 = 0$.
Wskazówka: Często najprościej jest znaleźć szereg Taylora danej funkcji poprzez manipulowanie znanym szeregiem Taylora innej funkcji.

Zadania

z26.1 Załóżmy, że $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ma promień zbieżności R równy $\frac{1}{L}$, jeśli $L \neq 0$ oraz $R = \infty$, gdy $L = 0$.

z26.2 Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma promień zbieżności R. Niech p będzie ustaloną liczbą. Jaki promień zbieżności ma szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n a_n x^n.$$

z26.3 Używając tylko rozwinięć w szeregi Taylora funkcji i twierdzenia 26.1 udowodnić, że:
(a) $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$,
(b) $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$,
(c) $\frac{d\operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{(1+x^2}$.

z26.4 Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma promień zbieżności R. Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną. Jaki promień zbieżności ma szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nk}.$$

z26.5 Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ma promień zbieżności R. Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną. Jaki promień zbieżności ma szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{n+k}.$$