Wykład z analizy

TYDZIEŃ 4.

FUNKCJE

ĆWICZENIA

c4.1 (a) Niech $f : u \to \frac{2u+2}{u^2+1}$ znaleźć $f(3)$.
(b) Niech $f : t \to \frac{t-1}{t+1}$ znaleźć $f(2)$. Określić dziedzinę f.
(c) Niech $f : u \to \frac{2u^2+2}{u^2+1}$ znaleźć dziedzinę funkcji f.
(d) Niech $y = 3x^{-2} + x$. Jaką wartość przyjmuje y dla $x = -3$?

c4.2 (a) Dla jakich wartości θ funkcja

$$\theta \to \frac{\sqrt{\theta^2 - 9}}{\sqrt{4 - (\theta - 8)^2}}$$

jest określona?
(b) Jaka jest dziedzina funkcji $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - x - 2}}$?

c4.3 Niech $f(x) = 2x^2 + 3$, $g(x) = \sqrt{x^2}$. Podać wzory na $f + g$, $f - g$, fg i $\frac{f}{g}$ i opisać ich dziedziny.

c4.4 Niech $f : [1, 2] \ni x \to \sqrt{x^2 + 1}$ $\quad g : [0, 3] \ni y \to y^2 + 2$ $\quad h : [0, 30] \ni z \to z + 1$.
(a) Znaleźć $h \circ g \circ f$.
(b) Sporządzić tablice funkcji f, g, h (używając kalkulatora) Naszkicować wykresy funkcji f, g i h.

c4.5 Podać przykład funkcji kawałkami monotonicznej, ale nie monotonicznej przyjmującej także wartości ujemne.

ZADANIA

z4.1 Opisać dziedzinę funkcji

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{4u - 1}} - \sqrt{1 - u^2}.$$

z4.2 Udowodnić, że każda funkcja określona na całej prostej jest sumą funkcji parzystej i nieparzystej.
Wskazówka: Dla danej funkcji f piszemy

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad f_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Mamy $f = f_1 + f_2$.

z4.3 Naszkicować wykres funkcji
(a) $f : x \to |x|$. Opisać zbiór wartości funkcji f.
(b) $g : t \to \sqrt{t}$. Opisać dziedzinę i zbiór wartości funkcji g.
(c) Opisać zbiór wartości funkcji $g \circ f$. Co można powiedzieć o funkcji $f \circ g$?

z4.4 Niech $x \to x^2 + rx + s$ i $y \to y^2 + rx - s + \frac{1}{2}$ będą funkcjami kwadratowymi, z których każda ma dokładnie jeden pierwiastek. Znaleźć r i s.

z4.5 Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$ i niech $a < 0$. Podać warunek konieczny i dostateczny na to aby funkcja f
(a) miała dwa różne pierwiastki,
(b) miała jeden pierwiastek,
(c) naszkicować wykresy funkcji f w przypadku (a) i (b).