Wykład z analizy

TYDZIEŃ 6.

FUNKCJE CIĄGŁE

ĆWICZENIA

(1) c5.1 Znaleźć iloraz i resztę przy dzieleniu wielomianu f przez wielomian g
   (a) $f(x) = 3x^2 + x^2 - x + 2 \quad g(x) = x^2 + x - 2$.
   (b) $f(s) = s^5 - 2s^4 + s^3 - 6s^2 + s + 8 \quad g(s) = s^2 + 1$
   (c) $f(y) = y^4 + y - 1 \quad g(y) = y^3 + 1$
   (d) $f(u) = u^2 + 2u - 3 \quad g(u) = u^2 - u - 1$.

(2) c5.2
   (a) Znaleźć wielomiany, dla którego 1 jest podwójnym pierwiastkiem, 0 i -1 są pojedynczymi pierwiastkami i które nie mają więcej pierwiastków.
   (b) Wielomian $y \to y^5 - 7y^3 + 2y^2 + 12y - 8$ ma podwójny pierwiastek -2 i pojedynczy pierwiastek 2. Znaleźć pozostałe pierwiastki.

(3) c5.3 Niech $f(x) = \frac{x+1}{1-x} \quad g(x) = 1 + x^2$. Znaleźć
   (a) $f + g$, (b) $f \circ g$, (c) $g \circ f$.

(4) c5.4 Niech $f(x) = \frac{x^2-x}{x+3} \quad g(x) = \frac{1}{x+1} \quad h(x) = \frac{x^2}{x+1}$. Znaleźć $[g \circ (g \circ h)] + f$ i wykazać, że jest to funkcja wymierna.

(5) c5.5 Dla następujących funkcji znaleźć punkty, w których funkcja nie jest określona, a wśród nich te, na które funkcja może być przedłużona do funkcji ciągłej.
   (a) $x \to \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$
   (b) $x \to \frac{x^2-x}{(x-1)^2 x}$
   (c) $x \to \frac{x^2-6x+9}{(x^2-9)(x-3)}$

ZADANIA

(1) z5.1 Znaleźć wszystkie pierwiastki i ich krotności wielomianu $(x+3)^3(x-1)^4(x^4-1)$.

(2) z5.2 Znaleźć granicę

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{2/3} - 5x^{1/3} + 4}{(x^{2/3} - 1)(x^{2/3} - 4)}.$$

(3) z5.3 Naszkicować wykres funkcji
   (a) $f : x \to \frac{1}{|x|}$. Czy funkcja ma granicę w punkcie $x = 0$?
   (b)

$$g : t \to \begin{cases} t^2 + 1 & \text{dla } t \leqslant 0 \\ t^{\frac{1}{2}} + 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases}.$$

   Czy funkcja g jest ciągła w każdym punkcie?

(4) z5.4 Niech f będzie funkcją określoną i ciągła wszędzie poza punktami $-1, 2, 3$. Podać przykład takiej funkcji przy pomocy wzoru.

(5) z5.5 Niech $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$ i niech $a > 0$. Podać warunek konieczny i dostateczny na to aby funkcja f

(a) była ciągła w każdym punkcie, naszkicować wykres funkcji f,
(b) była nieciągła w jednym punkcie,
(c) była nieciągła w dwóch punktach. Znaleźć te punkty.