Wykład z analizy

TYDZIEŃ 6.

FUNKCJE CIĄGŁE

ĆWICZENIA

c6.1 (a) Pokazać, że $\frac{1}{2} - (x-1)^2$ jest dodatnie blisko punktu 1.
(b) Niech niech $f(x) = x^2 + 1$. Pokazać, że $f(x) < 2$ blisko punktu 0.
(c) Niech $g(x) = \frac{1}{x}$. Czy $g(x) > \frac{1}{4}$ blisko punktu 1?

c6.2
(a) Niech $A(t) = \sqrt{t+1}$. Znaleźć $\delta > 0$ takie, że $A(t) < 3$ dla $|t-1| < \delta$.
(b) Niech $f(x) = 9x - 5$. Znaleźć $\delta > 0$ takie, że

$$|x-1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 4| < \delta.$$

c6.3 Niech $f(x) = 2x + 3$. Udowodnić, że f jest ciągła w punkcie 1.

c6.4 Niech f będzie funkcją ciągła w przedziale $[-1, 1]$ i niech $f(-1) = 1$, $f(1) = -1$. Czy funkcja ma przynajmniej jeden pierwiastek w przedziale $(-1, 1)$? Dlaczego?

c6.5 Znaleźć liczbę K taką, że wielomian $x^5 + x - 10$ ma przynajmniej jeden pierwiastek r taki, że $|r| \leqslant K$.

ZADANIA

z6.1 (a) Niech $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leqslant 1 \\ x+1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$. Czy $f(x) < \frac{3}{2}$ blisko 1.
(b) Niech $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Udowodnić, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$|x-2| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \frac{1}{4}| < \epsilon.$$

z6.2 Używając definicji "$\epsilon\ -\ \delta$" udowodnić, że następujące funkcje są ciągłe.
(a) $g(t) = \frac{t^2-1}{3}$.
(b) $h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x < -1 \\ -2x & \text{dla } x \geqslant -1 \end{cases}$
(c) $g : t \to \begin{cases} t^2 + 1 & \text{dla } t \leqslant 0 \\ t^{\frac{1}{2}} + 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases}$.

z6.3
(a) Udowodnić ciągłość $f + g$ i $f - g$ z twierdzenia 6.4. w streszczeniu.
(b) Korzystając z przykładu (f) (punkt 6.2 streszczenia) i twierdzenia o ciągłości funkcji złożonej udowodnić, że jeśli g jest funkcją ciągłą w punkcie x_0 i $g(x_0) \neq 0$, to $x \to \frac{1}{g(x)}$ jest funkcją ciągłą w punkcie x_0.

z6.4 Podać przykład funkcji ciągłej we wszystkich punktach przedziału $[-1, 1]$ poza punktem 0, która jest dodatnia w punkcie 1 i ujemna w punkcie -1 i nie ma pierwiastka w przedziale $[-1, 1]$.

z6.5 Niech $f(x) = x^2 + 4x + 1$. Znaleźć przedział długości 1 na którym funkcja f jest rosnąca i znaleźć funkcję odwrotną do funkcji f na tym przedziale.