Wykład z analizy

Tydzień 7.

Granica funkcji w punkcie

Ćwiczenia

c7.1 Znaleźć funkcje odwrotne wraz z ich dziedzinami i zbadać czy są ciągłe.
(a) $f(t) = \frac{3t+1}{t} \quad t > 0$,
(b) $g(y) = \frac{1-y^3}{y^3} \quad y > 1$,
(c) $h(x) = (1+\sqrt{x})^3 \quad x > 0$.

c7.2 Zbadać istnienie następujących granic. Obliczyć te, które istnieją.
(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+2x^2-x}{x}$,
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$,
(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}{x-1}$,
(d) $\lim_{y\to \frac{1}{3}} f(y)$, gdzie

$$f(y) = \begin{cases} y^2+y & \text{dla } y < \frac{1}{3} \\ 5 & \text{dla } y = \frac{1}{3} \\ 12y^3 & \text{dla } y > \frac{1}{3} \end{cases}$$

c7.3 Niech $\lim_{x\to 0} f(x) = 12$ i $\lim_{x\to 0} g(x) = 3$, znaleźć $\lim_{x\to 0} \sqrt{f \cdot g(x)}$

c7.4 Niech $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 2} g(x) = \frac{1}{3}$, $\lim_{x\to 3} g(x) = 2$. Znaleźć $\lim_{x\to 2}(f + \frac{g\circ f}{g})(x)$.

c7.5 Które z następujących równości zachodzą?
(a) $\lim_{x\to 0+} x^2 = 0$
(b) $\lim_{x\to +\infty} x^{-2} = 0$
(c) $\lim_{x\to -\infty}(1+\frac{1}{x}) = -1$.

Zadania

z7.1 Piszemy $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ gdy dla każdego M istnieje $\delta > 0$ takie, że $x \neq +0$ oraz $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$. Udowodnić $\lim_{x\to 0} x^{-2} = +\infty$. Czy jest prawdą, że $\lim_{x\to 0} x^{-1} = +\infty$?

z7.2 Podać analogiczne definicje dla (a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, (b) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, (c) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, (d) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

z7.3 Podać analogiczne definicje dla (a) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$, (b) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ (c) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$, (d) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$.

z7.4 Znaleźć $\lim_{x\to -1+} \frac{x^2}{2(1+x)}$, $\lim_{x\to -1-} \frac{x^2}{2(1+x)}$, $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{2(1+x)}$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2(1+x)}$.

z7.5 Obliczyć (a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^2+x-1}$ (b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^4+2x^2+1}{x^6+x-10}$.