Wykład z analizy

Tydzień 1.

Liczby Wymierne I

1.1. *Liczbami naturalnymi* nazywamy liczby $1, 2, 3, 4, ...$, a *dodatnimi liczbami wymiernymi* nazywamy liczby $\frac{1}{2}, \frac{17}{3}, \frac{4}{5}, ...$, ogólnie, $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi.

1.2. Dodatnie liczby wymierne i operacje na nich możemy ilustrować geometrycznie. Mając dany odcinek długości 1 dla dowolnej liczby naturalnej m rysujemy np. przy pomocy linijki i cyrkla odcinek długości m. Powołując się na twierdzenie Talesa potrafimy też podzielić dowolny odcinek na n równych części. W ten sposób mając narysowany odcinek długości 1 dla dowolnej liczby wymiernej dodatniej $a = \frac{m}{n}$ potrafimy narysować odcinek o długości a. Dodawanie dodatnich liczb wymiernych, oraz odejmowanie liczby wymiernej a od większej od niej liczby wymiernej b można ilustrować geometrycznie. Piszemy $a+b$ oraz $b - a$. Różnicą tą jest taka dodatnia liczba wymierna x, że $a + x = b$.

1.3. Następujące własności dodawania dodatnich liczb wymiernych, też można łatwo ilustrować geometrycznie

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \quad \text{przemienność dodawania,} \\ a + (b + c) &= (a + b) + c \quad \text{łączność dodawania.} \end{aligned}$$

1.4. *Iloczyn, produkt* ab dwóch dodatnich liczb wymiernych, jest dodatnią liczbą wymierną, podobnie *iloraz* $x = \frac{a}{b}$ jest dodatnią liczbą wymierną taką, że $bx = a$. Iloczyn dodatnich liczb wymiernych jest interpretowany geometrycznie jako pole prostokąta o bokach o długości a i b, a iloczyn trzech dodatnich liczb wymiernych abc jest objętością prostopadłościanu o krawędziach o długościach a, b, c.

1.5. Oto niektóre własności dodawania i mnożenia dodatnich liczb wymiernych.

$$\begin{aligned} ab &= ba \quad \text{przemienność mnożenia} \\ a(bc) &= (ab)c \quad \text{łączność mnożenia} \\ a(b + c) &= ab + ac \quad \text{rozdzielność mnożenia względem dodawania} \end{aligned}$$

1.6. Do dodatnich liczb wymiernych dodajemy liczbę 0 - na prostej wybieramy punkt, początek osi liczbowej i oznaczamy go liczbą 0. Na prawo od niego wybieramy punkt i oznaczamy go liczbą 1. Długość odcinka pomiędzy tymi punktami jest równa 1. Dodatnie liczby wymierne zaznaczamy punktami na prawo od punktu 0. Na lewo od zera, w tej samej odległości co dodatnia liczba wymierna a oznaczamy punkt przez $-a$. Oczywiście $a + (-a) = a - a = 0$ oraz $0 + a = a$ i $0 - a = -a$ dla dowolnej liczby wymiernej dodatniej a. Dodatnie liczby wymierne, zero i ujemne liczby wymierne stanowią **zbiór liczb wymiernych**, zbiór ten oznaczamy $\mathcal{Q}$ i zamiast pisać "a jest liczbą wymierną" piszemy $a \in \mathcal{Q}$.

1.7. Liczby wymierne możemy do siebie dodawać odejmować, mnożyć i dzielić gdy dzielnik jest różny od zera. Wszystkie prawa arytmetyki liczb wymiernych wynikają z następujących prostych postulatów.

1. Dla dowolnych $a, b \in \mathcal{Q}$ istnieje jedyna liczba $a + b \in \mathcal{Q}$.
2. $a + b = b + a$ dla dowolnych $a, b \in \mathcal{Q}$.
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ dla dowolnych $a, b, c \in \mathcal{Q}$.
4. Istnieje liczba *zero*, oznaczana przez 0 taka, że $0 + a = a$ dla dowolnego $a \in \mathcal{Q}$.
5. Dla każdej liczby $a \in \mathcal{Q}$ istnieje jedyna liczba $-a \in \mathcal{Q}$ taka, że $a + (-a) = 0$.
6. Dla dowolnych $a, b \in \mathcal{Q}$ istnieje dokładnie jedna liczba $ab \in \mathcal{Q}$.
7. $ab = ba$ dla dowolnych $a, b \in \mathcal{Q}$.

8. $(ab)c = a(bc)$ dla dowolnych $a, b, c \in \mathcal{Q}$
9. $a(b + c) = ab + ac$ dla dowolnych $a, b, c \in \mathcal{Q}$.
10. Istnieje liczba $1 \in \mathcal{Q}$ taka, że $1 \cdot a = a$ dla dowolnej liczby $a \in \mathcal{Q}$.
11. $1 \neq 0$.
12. Dla dowolnej liczby wymiernej $a \neq 0$ istnieje liczba a^{-1} taka, że $a(a^{-1}) = 1$.

1.8. Oczywiście piszemy $a + b + c$ zamiast $(a + b) + c$ i abc zamiast $(ab)c$, podobnie $bac = acb$. Dla $a \neq 0$ definiujemy $\frac{1}{a} = a^{-1}$ oraz $\frac{b}{a} = ba^{-1}$. Używając postulatów (1)-(12) dowodzimy, że $0a = 0$ dla każdego $a \in \mathcal{Q}$ Wynika stąd, że nie można określić dzielenia przez 0. Wynika stąd również, że

$$\text{jeśli} \quad ab \neq 0, \text{ to } a \neq 0 \text{ i } b \neq 0.$$

Z postulatów wynika, że

$$(-a)b = -(ab), \quad \text{skąd} \quad (-a)(-b) = ab.$$

Istotnie,

$$(-a)b + ab = (-a + a)b = 0b = 0, \text{ to znaczy, że } (-a)b = -(ab).$$

Dowodzimy, że np.

$$1 + 1 \neq 1$$

Załóżmy,że

$$1 + 1 = 1. \tag{1}$$

Z **5.** wynika istnienie liczby -1 takiej, że $-1 + 1 = 0$, dodając -1 do (1) mamy

$$-1 + (1 + 1) = -1 + 1$$

z **3.** otrzymujemy

$$(-1 + 1) + 1 = -1 + 1 \text{ więc } 1 = 0$$

co przeczy **11.**

1.9 Definiujemy liczby całkowite jako $1, 2, 3, ..., 0, -1, -2, -3, ...$ Zbiór liczb całkowitych oznaczamy przez $\mathbf{Z}$.

Dla dowolnej liczby $a \in \mathcal{Q}$ definiujemy

$$a^1 = a \quad a^2 = a \cdot a \quad a^3 = a \cdot a^2 \quad \text{i tak dalej}$$

Dla $a \neq 0$ definiujemy $a^0 = 1$ i

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2} \quad a^{-3} = \frac{1}{a^3} \quad \text{i tak dalej.}$$

Dla $m, n \in \mathbf{Z}$ oraz $a, b \in \mathcal{Q}$ oraz $a \neq 0, b \neq 0$ mamy

$$a^n b^n = (ab)^n \quad a^{m+n} = a^m a^n \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Identyczności

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2, \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

wynikają z postulatów **1. – 12.**

1.10. Niech $q \neq 1$. Wtedy

$$1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Istotnie,

$$\begin{aligned}(1-q)(1+q+q^2+...+q^{n-1}) =&1+q+q^2+...+q^{n-1}-q(1+q+q^2+...+q^{n-1})\\ =&1+q+q^2+...+q^{n-1}-q-q^2-...-q^{n-1}-q^n\\ =&1-q^n.\end{aligned}$$

1.11. Dla $a, b \in \mathcal{Q}$ i $n = 2, 3, 4, ...$ mamy tożsamość

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1}).$$

Jeśli $a = 0$ lub $a = b$, to tożsamość ta jest oczywista. Jeśli $0 \neq a \neq b$, to otrzymujemy ją z tożsamości 1.10.

Istotnie, podstawiając $q = \frac{b}{a}$ mamy

$$1 - \frac{b^n}{a^n} = (1 - \frac{b}{a})(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + ... + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}).$$

Mnożąc obie strony przez a^n otrzymujemy

$$\begin{aligned}a^n - b^n =&(a-b)a^{n-1}(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + ... + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}})\\ =&(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1}).\end{aligned}$$

1.12. Dla $x, y \in \mathcal{Q}$ piszemy $x < y$ gdy liczba x jest mniejsza od liczby y lub $x \leqslant y$ gdy liczba x jest mniejsza od liczby y lub $x = y$. Własności nierówności liczb wymiernych wynikają z **1. - 12.** i z następujących czterech postulatów

13. Dla $a, b \in \mathcal{Q}$ zachodzi dokładnie jedna z następujących relacji: $a > b$, $a = b$, $a < b$.

14. Jeśli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$.

15. Jeśli $a < b$, to $a + c < b + c$.

16. Jeśli $a < b$ i $0 < c$, to $ac < bc$.

1.13. Z postulatów **1.** – **16.** wynikają następujące fakty:

(1) $a > 0, b > 0 \Longrightarrow a + b > 0$.
(2) $a > 0, b > 0 \Longrightarrow ab > 0$.
(3) $a > 0 \Longrightarrow -a < 0$.
(4) $a \neq 0 \Longrightarrow a^2 > 0$.
(5) $a > 0, b < 0 \Longrightarrow ab < 0$.
(6) $a > 0, b > 0 \Longrightarrow \frac{a}{b} > 0$.
(7) $... - 4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4....$

Dowód (1): $a > 0 \Longrightarrow a + b > 0 + b = b$ (wobec **15.**), stąd $b > 0 \Longrightarrow a + b > 0$.

Dowód (3): $a > 0 \Longrightarrow a \neq 0$ (wobec **13.**) $-a > 0$ albo $-a < 0$. Jeśli $-a > 0$, to wobec (1) $a + (-a) > 0$, skąd $0 > 0$, co niemożliwe, więc $-a < 0$.

Dowód (7) Ponieważ $1 \neq 0$ (postulat **11.**) i $1^2 = 1$, mamy $0 < 1$, stąd $-1 < 0 < 1 \Longrightarrow -1 < 0 < 1 < 1 + 1 \Longrightarrow -1 < 0 < 1 < 2 \Longrightarrow -2 < -1 < 0 < 1 < -1$ itd.

1.14. Używając postulatów **1.-16.** możemy „rozwiązywać nierówności”, tzn znajdować zbiory liczb wymiernych spełniające nierówności np.

(1) $3 - 2x < 4x - 5 \Longrightarrow 8 < 6x \Longrightarrow \frac{4}{3} < x$ - Rozwiązanie: $\{x : x > \frac{4}{3}\}$
(2) $x - 6 < 2x - 5 \leqslant x - 3 \Longrightarrow x - 6 < 2x - 5$ i $2x - 5 \leqslant x - 3 \Longrightarrow -x < 1$ i $x \leqslant 2 \Longrightarrow -1 < x \leqslant 2$ - Rozwiązanie: $\{x : -1 < x \leqslant 2\}$.
(3) $\frac{2x+1}{x+1} > 3$ oraz $x \neq -1$. Wtedy

$$\text{albo} \quad x + 1 > 0 \quad \text{i} \quad 2x + 1 > 3(x + 1) \tag{2}$$

$$\text{albo} \quad x + 1 < 0 \quad \text{i} \quad 2x + 1 < 3(x + 1) \tag{3}$$

Rozwiązanie jest sumą zbiorów: rozwiązań nierówności (2) i rozwiązań nierówności (3).