Wykład z analizy

TYDZIEŃ 10.

POCHODNE WYŻSZYCH RZĘDÓW

10.1. Niech r będzie liczbą wymierną. Wtedy

$$\frac{dx^r}{dx} = rx^{r-1}. \tag{10.1}$$

Wzór (10.1) udowodnimy najpierw dla liczb $r = \frac{1}{n}$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Mamy pokazać, że

$$\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{czyli} \quad \frac{d\sqrt[n]{x}}{dx} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}. \tag{10.2}$$

Dla $n = 2$ jest to wzór na pochodną $\sqrt{x}$, który wyprowadziliśmy bezpośrednim rachunkiem, 8.5 (d), z definicji pochodnej.

Dla dowodu (10.2) zauważamy, że funkcje $x \to y = x^{\frac{1}{n}}$ i $y \to x = y^n$ są wzajemnie odwrotne. Korzystamy z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej. Piszemy

$$\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{dy^n}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Niech teraz $r = \frac{m}{n}$, gdzie m jest dowolną liczbą całkowitą, a n dodatnią liczbą całkowitą. Korzystamy ze wzoru na pochodną funkcji złożonej.

$$\frac{dx^r}{dx} = \frac{d(x^{\frac{1}{n}})^m}{dx^{\frac{1}{n}}}\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx} = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1} = rx^{r-1}.$$

10.2 Przykłady.

(a) Obliczymy pochodną funkcji $f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt[4]{x}}$. Mamy

$$\begin{aligned}
f'(x) =& \frac{d}{dx}\left(\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right) = \frac{d}{dx}(1+x^2)^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{4}} \\
=& \frac{d(1+x2)^{\frac{1}{3}}}{dx}x^{-\frac{1}{4}} + (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{d(x^{-\frac{1}{4}})}{dx} \\
=& \frac{d(1+x^2)^{\frac{1}{3}}}{d(1+x^2)}\frac{d(1+x^2)}{dx}x^{-\frac{1}{4}} + (1+x^2)^{\frac{1}{3}}\frac{dx^{-\frac{1}{4}}}{dx} \\
=& \frac{1}{3}(1+x^2)x^{-\frac{2}{3}}2xx^{-\frac{1}{4}} + (1+x^2)^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{5}{4}} \\
=& \frac{2}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{4}(1+x^2)^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{5}{4}}.
\end{aligned}$$

(b) Obliczymy pochodną funkcji $f(x) = (1+x^3)^{\frac{4}{5}}$. Mamy

$$f'(x) = \frac{d(1+x^3)^{\frac{4}{5}}}{dx} = \frac{d(1+x^3)^{\frac{4}{5}}}{d(1+x^3)} \cdot \frac{d(1+x^3)}{dx} = \frac{4}{5}(1+x^3)^{-\frac{1}{5}}3x^2.$$

(c) Obliczymy pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$. Mamy

$$f'(x) = \frac{d(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{2}}}{d(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{5}})} \cdot \frac{d(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{5}})}{dx} = \frac{1}{2}(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{5}})^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}).$$

10.3. Przykłady funkcji ciągłych nieróżniczkowalnych.
(a) Funkcja $x \to |x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie 0. Istotnie,

$$\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } h > 0 \\ -1 & \text{gdy } h < 0 \end{cases}, \text{ więc } \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \text{ nie istnieje.}$$

(b) Funkcja $x \to \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ -\sqrt[3]{|x|} & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$ nie jest różniczkowalna w punkcie 0. Istotnie

$$\frac{f(h)}{h} = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = h^{-\frac{2}{3}} & \text{gdy } h > 0 \\ \frac{-\sqrt[3]{|h|}}{h} = (-h)^{-\frac{2}{3}} & \text{gdy } h < 0 \end{cases}$$

Skąd, w obu przypadkach,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} |h|^{\frac{2}{3}} = +\infty.$$

10.4. Niech f będzie funkcją taką, że jej pochodna f' jest różniczkowalna. Pochodna funkcji f' jest oznaczana przez f'' i nazywa się drugą pochodną funkcji f. Innymi słowy,

$$f'' = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f = \frac{d^2}{dx^2}f.$$

Podobnie określamy trzecią pochodną (i wyższe pochodne) funkcji f

$$f''' = \left(\frac{d}{dx}\right)^3 f = \frac{d^3}{dx^3}f \quad f^(4) = \left(\frac{d}{dx}\right)^4 f = \frac{d^4}{dx^4}f \ldots$$

Mówimy,że funkcja f jest k-krotnie różniczkowalna w przedziale (a,b) jeśli istnieją wszystkie pochodne $f, f', f'', \ldots, f^{(k)}$ dla każdego punktu przedziału (a,b).

10.5. Przykłady.
(a) Niech $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Wtedy

$$f'(x) = 9x^2 + 4x + 2 \quad f''(x) = 18x + 4 \quad f'''(x) = 18 \quad f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \cdots = 0.$$

(b) Niech $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$. Wtedy

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} \quad f''(x) = \frac{10}{6}x^{-\frac{1}{3}}$$

Trzecia pochodna i wyższe nie istnieją w punkcie 0.

10.6. Podamy teraz twierdzenie bez dowodu, które intuicyjnie wydaje się oczywiste:

Twierdzenie. *Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale domkniętym $[a,b]$. Wtedy istnieją punkty $x_1, x_2 \in [a,b]$ w których funkcja f przyjmuje wartość maksymalną oraz wartość minimalną, odpowiednio, to znaczy*

$$f(x_1) \geq f(x) \text{ dla każdego } x \in [a,b], \quad f(x_2) \leqslant f(x) \text{ dla każdego } x \in [a,b]$$

Twierdznie 10.7. *Niech f będzie funkcją określoną na przedziale (a,b). Załóżmy, że dla punktu $x_0 \in (a,b)$ pochodna $f'(x_0)$ istnieje. Wtedy dla x bliskich x_0 mamy*

$$f'(x_0) > 0 \to \begin{cases} f(x) < f(x_0) & \text{dla } x < x_0 \\ f(x_0) < f(x) & \text{dla } x_0 < x \end{cases} \quad \text{oraz} \quad f'(x_0) < 0 \to \begin{cases} f(x) > f(x_0) & \text{dla } x < x_0 \\ f(x_0) > f(x) & \text{dla } x_0 < x \end{cases}$$

Dowód. Pochodna $f'(x_0)$ jest granicą ilorazu różnicowego

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{gdy} \quad h \to 0$$

Jeśli więc $f'(x_0) > 0$, to iloraz różnicowy jest dodatni dla małych h. Mnożąc $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$ przez h dla $h > 0$ otrzymujemy $f(x_0+h) > f(x_0)$, a dla $h < 0$ otrzymujemy $f(x_0+h) < f(x_0)$. To dowodzi twierdzenia w przypadku $f'(x_0) > 0$. Dowód w drugim przypadku jest podobny. $\square$

Wniosek. *Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a,b]$ różniczkowalną w punkcie $x_0 \in (a,b)$. Załóżmy, że funkcja f przyjmuje wartość maksymalną (minimalną) w punkcie x_0. Wtedy $f'(x_0) = 0$.*

Dowód. Istotnie, poprzednie twierdzenie mówi, że w przypadku $f'(x_0) \neq 0$, tzn. $f'(x_0) > 0$ lub $f'(x_0) < 0$ blisko punktu x_0 są punkty x, w których $f(x) < f(x_0)$ i punkty y w których $f(y) > f(x_0)$. $\square$

Twierdzenie (Rolle'a). . *Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[a,b]$ i różniczkowalną w każdym punkcie odcinka (a,b). Wtedy, jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $c \in (a,b)$ taki, że $f'(c) = 0$.*

Dowód. Założenie $f(a) = f(b)$ pociąga, że albo funkcja f jest stała i wtedy $f'(x) = 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, albo f przyjmuje swoją wartość największą lub swoją wartość najmniejszą w punkcie c wewnątrz odcinka (a,b). W punkcie tym $f'(c) = 0$. $\square$

Twierdzenie 10.8. *Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a,b]$, mającą pochodną w każdym punkcie przedziału (a,b). Wtedy*

$$f'(x) > 0 \text{ dla każdego } x \in (a,b) \to f \text{ jest rosnąca}, \quad f'(x) < 0 \text{ dla każdego } x \in (a,b) \to f \text{ jest malejąca.}$$

Dowód. Niech $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a,b)$ i niech $x_1, x_2 \in (a,b)$ oraz $x_1 < x_2$. Załóżmy, że $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Oznaczmy $f(x_1) = \gamma$. Ponieważ $f'(x_1) > 0$ dla x' blisko x_1 mamy $x_1 < x' < x_2$ oraz $f(x_1) < f(x')$. Innymi slowy $f(x') > \gamma \geqslant f(x_2)$. Ponieważ f jest ciągłą istnieje punkt x'', $x' < x'' \leq x_2$ taki, że $\gamma = f(x'')$. Tak więc na końcach odcinka $[x_1, x'']$ funkcja przyjmuje równe wartości. Stąd na podstawie twierdzenia Rolle'a istnieje punkt c wewnątrz tego odcinka dla którego $f'(c) = 0$, wbrew założeniu, że $f'(x) > 0$ dla wszystkich punktów odcinka (a,b). $\square$

W przypadku $f'(x) < 0$ rozumowanie jest bardzo podobne.

10.9. Przykłady.

(a) Niech

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^{\frac{1}{3}}, \quad h(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leq 0 \\ 2x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Wszystkie trzy funkcje są rosnące na całej prostej, przy czym jednak $f'(0) = 0$, $g'(0) = +\infty$ (porównaj 10.3 (b)) , pochodna h w zerze nie istnieje.

(b) Znajdziemy przedziały, w których funkcja $f(t) = \frac{1+t}{1+t^2}$ rośnie i przedziały, w których f maleje.

Obliczamy $f'(t) = \frac{2-(1+t)^2}{(1+t^2)^2}$. Ponieważ mianownik jest dodatni,

$$f'(t) > 0 \iff (1+t)^2 < 2 \iff |1+t| < \sqrt{2} \iff -1-\sqrt{2} < t < -1+\sqrt{2}$$

W przedziałach $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ i $(-1+\sqrt{2}, +\infty))$ funkcja f maleje. Zauważamy również, że

$$\lim_{t\to-\infty} f(f) = 0 = \lim_{t\to+\infty} f(t).$$

(c) Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wtedy funkcja f nie ma pochodnej w punkcie 0, a poza tym

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Funkcja f maleje w obu przedziałach $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$.

Twierdzenie 10.10. *Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b). Wtedy*

$f'(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in (a, b) \to f$ jest niemalejąca, $f'(x) \leqslant 0$ dla każdego $x \in (a, b) \to f$ jest nierosnąca.

Dowód. Niech $x_1 < x_2$. Mamy pokazać, że jeśli $f'(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Dla $n > 0$ rozważmy funkcję $g(x) = f(x) + \frac{x}{n}$. Wtedy $g'(x) = f'(x) + \frac{1}{n}$. Ponieważ $f'(x) \geqslant 0$, więc $g'(x) \geqslant \frac{1}{n} > 0$. Wobec tego funkcja g jest rosnąca, skąd $g(x_1) < g(x_2)$. Czyli $f(x_1) + \frac{x_1}{n} < f(x_2) + \frac{x_2}{n}$. Otrzymujemy stąd, że $f(x_1) - f(x_2) < \frac{x_2 - x_1}{n}$. Ponieważ to zachodzi dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ z postulatu Archimedesa wynika, że $f(x_1) - f(x_2) \leqslant 0$, czyli $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. □

Twierdzenie o wartości średniej 10.11. . *Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[a, b]$ i różniczkowalną w każdym punkcie odcinka (a, b). Wtedy istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{10.3}$$

Dowód. Rozważmy funkcję

$$g(x) = f(x) - (f(b) - f(a))\frac{x - a}{b - a}.$$

Wtedy $g(a) = f(a) \quad g(b) = f(a)$. Skąd wobec twierdzenia Rolle'a istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \text{skąd wynika (10.3).}$$

□