Wykład z analizy

TYDZIEŃ 11.

MAKSIMA I MINIMA FUNKCJI

11.1. Niech f będzie funkcją określoną na odcinku (a, b). Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$ oraz $f'(x_0) = 0$, to punkt x_0 nazywa się punktem krytycznym funkcji f.

11.2. Mówimy, że funkcja f określona na odcinku (a, b) *ma lokalne maksimum* w punkcie x_0, jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że dla $|x - x_0| < \delta$ mamy $f(x_0) \geqslant f(x)$. Mówimy, że f *ma lokalne minimum* w punkcie x_0, jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że dla $|x - x_0| < \delta$ mamy $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Mówimy, że f ma *istotne* lokalne maksimum w punkcie x_0, jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że dla $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ mamy $f(x_0) > f(x)$. Mówimy, że f ma *istotne* lokalne minimum w punkcie x_0, jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że dla $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ mamy $f(x_0) < f(x)$.

Mówimy, że f ma *lokalne ekstremum* w punkcie x_0, jeśli f ma lokalne minimum lub maksimum w punkcie x_0.

Twierdzenie. *Jeśli funkcja f określona na odcinku (a, b) i różniczkowalna w punkcie x_0 ma lokalne ekstremum w punkcie x_0, to $f'(x_0) = 0$, innymi słowy, x_0 jest punktem krytycznym funkcji f.*

Twierdzenie to wynika natychmiast z twierdzenia 10.6.

Uwaga 11.3. *Z definicji lokalnego ekstremum wynikają następujące implikacje.*

- *f jest malejąca w $[x_0 - \delta, x_0]$ i rosnąca w $[x_0, x_0 + \delta]$ $\quad\Rightarrow\quad$ f ma istotne lokalne minimum w x_0.*
- *f jest rosnąca w $[x_0 - \delta, x_0]$ i malejąca w $[x_0, x_0 + \delta]$ $\quad\Rightarrow\quad$ f ma istotne lokalne maksimum w x_0.*
- *f jest nierosnąca w $[x_0 - \delta, x_0]$ i niemalejąca w $[x_0, x_0 + \delta]$ $\quad\Rightarrow\quad$ f ma lokalne minimum w x_0.*
- *f jest niemalejąca w $[x_0 - \delta, x_0]$ i nierosnąca w $[x_0, x_0 + \delta]$ $\quad\Rightarrow\quad$ f ma lokalne maksimum w x_0.*

Twierdzenie 11.4.. *Niech f będzie funkcją określoną na odcinku (a, b) i różniczkowalną w punktach bliskich punktu $x_0 \in (a, b)$. Załóżmy, że $f''(x_0)$ istnieje. Wtedy*

- *Jeśli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ f ma istotne lokalne minimum w x_0.*
- *Jeśli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ f ma istotne lokalne maksimum w x_0.*

Dowoód. Załóżmy, że $f'(x_0) = 0$. Wtedy z twierdzenia 10.6 zastosowanego do funkcji f' wynika że jeśli $f''(x_0) > 0$, to $f'(x) < f'(x_0) = 0$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ oraz $f'(x) > f'(x_0) = 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Innymi słowy funkcja f jest malejąca na lewo od punktu x_0 i rosnąca na prawo od punktu x_0. Z 11.2 wynika, że f ma istotne minimum w punkcie x_0. Rozumujemy podobnie w drugim przypadku. $\square$

11.5. Przykłady

(a) Znajdziemy lokalne maksima i minima funkcji $f : x \to 4x^4 - x^2 + 5$. Szukamy punktów krytycznych f. Rozwiązaniami równania $0 = f'(x) = 16x^3 + 2x = 2x(8x^2 - 1)$ są punkty $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{8}},\ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{8}}$. $f"(x) = 48x^2 - 2$. Mamy więc $f''(x_1) = -2$, $f''(x_2) = 4$, $f''(x_3) = 4$. Więc $f''(x_1) < 0 \Rightarrow f$ ma lokalne maksimum w punkcie x_1 $f''(x_2) = f''(x_3) > 0 \Rightarrow f$ ma lokalne minimum w punktach x_2 i x_3.

(b) Rozważmy funkcję $f : t \to \sqrt{1 + t^4}$. Widzimy, że $f(0) < f(t)$ dla każdego $t \neq 0$. Zbadamy czy funkcja f ma jeszcze inne punkty krytyczne. Piszemy $f'(t) = \frac{4t^3}{2\sqrt{1+t^4}} = 0$, skąd wynika, że $t = 0$. Czyli funkcja nie ma innych lokalnych maksimów czy minimów. Zauważmy też, że zbadanie drugiej pochodnej funkcji f w punkcie 0 nic nie daje, bowiem $f''(0) = 0$.

11.6. Funkcja f określona na $[a, b]$ nazywa się *kawałkami monotoniczna*, jeśli przedział $[a, b]$ można podzielić na skończenie wiele przedziałów tak, że w każdym z nich funkcja jest monotoniczna.

Twierdznie. *Niech f będzie funkcją różniczkowalna w każdym punkcie przedziału (a, b) oraz niech f' będzie funkcją ciągłą. Wtedy jeśli f' ma skończenie wiele pierwiastków, to funkcja f jest kawałkami monotoniczna.*

Dowód. Pomiędzy dwoma sąsiednimi pierwiastkami f' funkcja f' jest albo dodatnia albo ujemna. Istotnie, ponieważ f' jest funkcją ciągła, więc jeśli w przedziale przyjmuje i wartości dodatnie i ujemne , to musi gdzieś pomiędzy przyjmować wartość 0. Wynika to z własności wartości pośredniej funkcji ciągłych. Tak więc w przedziałach, których końcami są sąsiednie pierwiastki funkcji f' funkcja f jest albo rosnąca albo malejąca. □

Wniosek. *Funkcje wymierne i funkcje postaci $x \to x^{\frac{1}{n}}$ są kawałkami monotoniczne.*

Istotnie, jeśli $f(x) = \frac{P(x)}{Qx}$, gdzie P, Q są wielomianami, jest funkcją wymierną, to

$$f'(x) = \frac{P(x)Q'(x) - P'(x)Q(x)}{P^2(x)} \quad \text{oraz} \quad f'(x) = 0 \iff P(x)Q'(x) - P'(x)Q(x) = 0,$$

ale $P(x)Q'(x) - P'(x)Q(x)$ jest wielomianem, więc ma tylko skończenie wiele pierwiastków.

11.7. Mówimy, że funkcja f przyjmuje maksimum w punkcie x_0, jeśli $f(x_0) \geqslant f(x)$ dla wszystkich x z dziedziny f. Piszemy

$$f(x_0) = \max_x f(x).$$

Mówimy, że funkcja f przyjmuje minimum w punkcie x_0, jeśli $f(x_0) \leqslant f(x)$ dla wszystkich x z dziedziny f. Piszemy

$$f(x_0) = \min_x f(x).$$

11.8. Przykłady.

(a) Funkcja $f : (0, 1) \ni x \to 2x$ nie ma ani maksimum ani minimum w zbiorze $(0, 1)$. Rzecz jasna, na zbiorze $[0, 1]$ funkcja ta przyjmuje maksimum w punkcie 1 i minimum w punkcie 0.

(b) Niech

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0 \text{ i dla } x = 1 \end{cases}$$

Dziedziną funkcji f jest przedział domknięty $[1, 0]$. Funkcja nie jest ciągła i nie przyjmuje ani maksimum ani minimum na swojej dziedzinie $[0, 1]$.

(c) Funkcja $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ określona na przedziale $(-1, 1)$ ma minimum w punkcie 0 i nie ma maksimum.

Twierdzenie 11.9. *Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalną na przedziale (a, b) taką, że pochodna f' jest funkcją ciągłą i ma skończenie wiele pierwiastków $x_1, \ldots, x_n$. Wtedy maksimum funkcji f w przedziale $[a, b]$ jest największą z liczb $f(a), f(x_1), \ldots, f(x_n), f(b)$, a minimum funkcji f w przedziale $[a, b]$ jest najmniejszą z tych liczb.*

Istotnie w punkcie w przedziale otwartym (a, b), w którym funkcja f przyjmuje maksimum czy minimum pochodna musi się zerować, więc maksimum i minimum muszą być przyjęte w jednym z punktów $a, x_1, \ldots, x_n, b$. Największa z wartości f w tych punktach jest więc maksimum funkcji f, a najmniejsza minimum f.

11.11. Przykłady.

(a) Znajdziemy maksimum i minimum funkcji $f(x) = \frac{1}{10}(x^3 - 12x + 10)$ w przedziale $[-3, 3]$.

Mamy $f'(x) = \frac{1}{10}(3x^2 - 12) = \frac{3}{10}(x + 2)(x - 2)$. Stąd $f(-3) = 1,9$, $f(-2) = 2,6$, $f(2) = -0,6$, $f(3) = 0,1$. Tak więc

$$\max_{x \in [-3,3]} f(x) = f(-2) = 2,6$$

$$\min_{x \in [-3,3]} f(x) = f(2) = -0,6.$$

(b) Znajdziemy maksimum i minimum funkcji $f(x)=\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}$ w przedziale $[0,100]$.

Mamy $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}(x^{\frac{1}{4}}-1)$. Pochodna przyjmuje tylko jedno zero w przedziale $(0,100)$, w punkcie 1. Mamy $f(0)=0,\ f(1)=-1,\ f(100)=10-2\sqrt{10}>0$. Więc

$$\max_{x\in[0,100]}f(x)=f(100)=10-2\sqrt{10}\qquad\min_{x\in[0,100]}f(x)=f(1)=-1.$$

(c) Znajdziemy maksimum i minimum funkcji $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ w przedziale $(-1,1)$.

Ponieważ f przyjmuje tylko wartości dodatnie, więc

$$\max_{x\in(-1,1)}f^2(x)=(\max_{x\in(-1,1)}f(x))^2$$
$$\min_{x\in(-1,1)}f^2(x)=(\min_{x\in(-1,1)}f(x))^2.$$

Znajdziemy więc punkty gdzie $(f^2)'(x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}=0$. Taki punkt jest tylko jeden 0. $f(0)=1$. W tym punkcie funkcja nie może przyjmować maksimum, bo $f^2(\frac{1}{2})=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}>1$, więc $\min_{x\in(-1,1)}f(x)=f(0)=1$. Ponieważ końce przedziału nie należą do $(-1,1)$, więc funkcja f nie przyjmuje maksimum w $(-1,1)$.

(d) Udowodnimy twierdzenie: *Wśród prostokątów mających przekątną ustalonej długości a, kwadrat ma największe pole.*

Niech x,y będą długościami boków prostokąta. Wtedy $a^2=x^2+y^2$, skąd $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Pole tego prostokąta jako funkcja x wynosi $P(x)=xy=x\sqrt{a^2-x^2}$. Szukamy maksimum funkcji P w przedziale $[0,a]$. Obliczmy pochodną:

$$P'(x)=\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}\cdot(1-\frac{x^2}{a^2-x^2})$$

Skąd $P'(x)=0\iff x=a$ lub $\frac{1}{2}a^2=x^2$. Ale $P(a)=0$, a w drugim przypadku $y=\sqrt{a^2-\frac{1}{2}s^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=x$. więc prostokąt jest kwadratem.

(e) Znajdziemy prostokąt o największym polu, którego jeden wierzchołek jest w początku układu, dwa na dodatnich półosiach x-ów y-ów, a czwarty wierzchołek leży na paraboli o równaniu $y=4-x^2$. Współrzędne czwartego wierzchołka są więc $(x,4-x^2)$. Pole tego prostokąta jest $P(x)=x(4-x^2)$. Szukamy maksimum P w przedziale $[0,2]$. Mamy $P'(x)=3x^2-4$. Więc $P'(x)=0$ i $x\in[0,2]\iff x=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Ponieważ $P(0)=P(2)=0$ więc $P(\frac{2}{\sqrt{3}})=\frac{16}{3\sqrt{3}}$ jest maksymalną wartością P.

11.12. Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale (a,b) i ciągłą w przedziale $[a,b]$. Jeśli

$$f''(x)>0\quad\forall x\in(a,b),$$

to $f'(x)$ jest funkcją rosnącą, czyli współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x,f(x))$ rośnie gdy x rośnie. Z tego wynika, że wykres funkcji zakrzywia się do góry w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Mówimy wtedy, że funkcja f jest *wypukła* w przedziale $[a,b]$. Podobnie, jeśli

$$f''(x)<0\quad\forall x\in(a,b),$$

to $f'(x)$ jest funkcją malejąca, czyli współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x,f(x))$ maleje gdy x rośnie. Z tego wynika, że wykres funkcji zakrzywia się do w dół w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Mówimy wtedy, że funkcja f jest *wklęsła* w przedziale $[a,b]$. Punkt x_0 taki, że f jest wypukła w przedziale $[a,x_0]$ i wklęsła w przedziale $[x_0,b]$ lub wklęsła w przedziale $[a,x_0]$ i wypukła w przedziale $[x_0,b]$ nazywa się *punktem przegięcia* wykresu funkcji f. Jeśli f'' jest ciągła, to wtedy, oczywiście, $f''(x_0)=0$.

11.13. Następujące twierdzenie jest intuicyjnie oczywiste. Analityczny jego dowód jest nieco trudniejszy i tymczasem zostaje pominięty.

Twierdzenie. *Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale (a,b) i ciągłą w przedziale $[a,b]$. Niech $x \to l_1(x)$ będzie funkcją liniową taką, że $l_1(a) = f(a)$, $l_1(b) = f(b)$. Innymi słowy wykres l_1 jest sieczną wykresu f przez punkty $(a, f(a))$ oraz $(b, f(b))$. Niech $x_0 \in (a,b)$ i niech $x \to l_2(x)$ będzie funkcją liniową taką, że $l_2(x_0) = f(x_0)$ i $l_2'(x_0) = f'(x_0)$. Czyli wykres l_2 jest prostą styczną do wykresu f w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Mamy wtedy*

$$f''(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f(x) < l_1(x) \ i \ f(x) > l_2(x) \quad \forall\, x \in (a,b),\ x \neq x_0$$
$$f''(x) < 0 \quad \forall\, x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f(x) > l_1(x) \ i \ f(x) < l_2(x) \quad \forall\, x \in (a,b),\ x \neq x_0.$$

11.14. Przykład

Niech $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 20$. Znajdziemy punkty gdzie f ma lokalne minimum i maksimum, oraz przedziały gdzie f jest wypukła i wklęsła. Pozwala to naszkicować wykres funkcji f.

Obliczamy pochodne

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$$
$$f''(x) = 6x + 6,$$

więc $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, gdzie $x_1 = -4$ a $x_2 = 2$. $f''(x_3) = 0$ gdzie $x_3 = -1$. Stąd f jest wklęsła w $(-\infty, -1)$, wypukła w $(-1, +\infty)$, ma lokalne maksimum w punkcie -4, lokalne minimum w punkcie 2, a punkt -1 jest punktem przegięcia wykresu f