Wykład z analizy

Tydzień 12.

Badanie przebiegu funkcji. Pierwotna

12.1. Niech f będzie funkcją. Aby zbadać przebieg funkcji f i naszkicować jej wykres możemy postępować jak następuje:

(1) Badamy czy funkcja jest parzysta, nieparzysta, czy ani taka ani taka. Jeśli zachodzi jeden z dwóch pierwszych przypadków, to ograniczamy się do badania przebiegu funkcji na zbiorze $\{x : x \geqslant 0\}$.

(2) Znajdujemy przedziały, w których f jest określona i badamy jednostronne granice f w $-\infty$ i $+\infty$ oraz na końcach przedziałów, w których f jest określona. Jeśli f ma granicę w $+\infty$ lub $-\infty$ równą c, to rysujemy prostą $y = c$, do której wykres f się zbliża gdy $x \to +\infty$ lub $x \to -\infty$. Prosta $y = c$ nazywa się *poziomą asymptotą* funkcji f. Podobnie, gdy na końcu przedziału określoności f ma jednostronną nieskończoną granicę rysujemy prostą $x = \alpha$, gdzie α jest końcem przedziału. Prosta ta nazywa się pionową asymptotą f. Rzecz jasna, funkcja f może mieć dwie asymptoty poziome (w $+\infty$ i $-\infty$) i wiele asymptot pionowych.

(3) Lokalizujemy pierwiastki funkcji f. Nie zawsze udaje się nam znaleźć te pierwiastki dokładnie.

(4) Znajdujemy pochodną f' i lokalizujemy punkty krytyczne f (czyli pierwiastki f'). W przedziałach pomiędzy punktami krytycznymi badamy czy funkcja f jest rosnąca czy malejąca (badamy znak f'). Dla każdego punktu krytycznego β sprawdzamy czy jest to punkt lokalnego maksimum lub minimum czy nie i rysujemy styczną poziomą do wykresu funkcji w punkcie $(\beta, f(\beta))$. Badamy również zachowanie f w punktach α gdzie granica $\lim_{x\to\alpha^-} f'(x)$ lub $\lim_{x\to\alpha^+} f'(x)$ jest równa nieskończoności. Są to punkty w których styczna do wykresu jest pionowa.

(5) Obliczamy f'' i lokalizujemy jej pierwiastki tak dokładnie jak się da, i badamy w których przedziałach pomiędzy zerami f'' funkcja f jest wklęsła, a w których wypukła. Dla każdego γ będącego pierwiastkiem f'' obliczmy $f(\gamma)$ i $f'(\gamma)$ a w punktach $(\gamma, f(\gamma))$ rysujemy proste styczne do wykresu funkcji. Badamy, które z tych punków są punktami przegięcia.

(6) Na podstawie wiadomości uzyskanych przez wykonanie (1)-(5) rysujemy wykres funkcji.

12.2. Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = f(-\infty),$$
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-), \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+).$$

Przykłady.

(a) Niech $f(x) = -\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} + 2$. f jest wielomianem, więc f jest wszędzie określona. Dla $x \neq 0$ mamy $f(x) = \frac{x^3}{6}(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{12}{x^3})$. Ponieważ dla dla dużych $|x|$ wyrażenie $1 + \frac{1}{x^2} - \frac{12}{x^3}$ jest bliskie 1, więc $f(x) > 0$ dla $x > 0$ i $f(x) < 0$ dla $x < 0$, tzn. $f(+\infty) = +\infty$ i $f(-\infty) = -\infty$. Obliczamy $f'(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}$. Więc $f'(x) < 0$, czyli f jest malejąca. Wynika stąd, że f ma dokładnie jeden pierwiastek. Zauważmy, że leży on pomiędzy 2 i 3. Obliczamy $f''(x) = -x$, więc f jest wypukła w przedziale $(-\infty, 0)$ i wklęsła w przedziale $(0, +\infty)$. Punkt 0 jest więc punktem przegięcia funkcji f. Obliczamy $f(0) = 2$. Szkicujemy wykres funkcji f.

(b) Niech $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$. f jest określona wszędzie poza punktem 2. Obliczamy $f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$ więc $f'(x) < 0$ dla wszystkich punktów $x \neq 2$. W obu przedziałach $(-\infty, 2)$ i $(2, +\infty)$ funkcja f jest malejąca. Mamy

$$f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}}, \quad \text{więc} \quad f(-\infty) = 1, \quad f(+\infty) = 1.$$

Prosta $y=1$ jest poziomą asymptotą f w $+\infty$ i $-\infty$. Mamy również $f(2^-)=-\infty$ i $f(2^+)=+\infty$. Prosta $x=2$ jest więc pionową asymptotą funkcji f w punkcie 0. Obliczamy $f''(x)=\frac{2}{(x-2)^3}$, więc $f''(x)<0$ dla $x<2$ i $f''(x)>0$ dla $x>2$. Tak więc w przedziale $(-\infty,2)$ funkcja f jest wklęsła, a w przedziale $(2,+\infty)$ funkcja f jest wypukła. Szkicujemy wykres funkcji f.

(c) Niech $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$. Funkcja f jest parzysta, $f(0)=0$. Wystarczy zbadać funkcję w przedziale $(0,+\infty)$. Funkcja jest określona w przedziale $(0,+\infty)$ poza punktem 1. Dla $x\to+\infty$, piszemy

$$f(x)=\frac{1}{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{-1}{1-\frac{1}{x^2}},$$

więc $f(+\infty)=-1$. Również

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x}\frac{1}{1-x},$$

więc, ponieważ pierwszy ułamek jest bliski $\frac{1}{2}$ gdy $x\to1$ mamy $f(1^-)=+\infty$ i $f(1^+)=-\infty$. Widzimy, że prosta $y=-1$ jest poziomą asymptotą f, a prosta $x=1$ pionową asymptotą f. Obliczamy

$$f'(x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2},\quad f''(x)=\frac{2(1+2x^2-3x^4)}{(1-x^2)^4}.$$

Mamy $f(0)=f'(0)=0$ oraz $f''(0)=2$, więc f ma lokalne minimum w punkcie 0. Ponieważ $f''(x)>0$ w przedziale $(0,1)$ i $f''(x)<0$ w przedziale $(1,+\infty)$, w pierwszym przedziale f jest wypukła, w drugim wklęsła. Rysujemy wykres funkcji dla x'ów dodatnich, a potem odbijamy symetrycznie względem osi pionowej.

(d) Niech $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}=(x-1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$. Funkcja jest zdefiniowana dla $x\neq2$. Korzystając z przykładu (b) widzimy, że

$$f(-\infty)=f(+\infty)=1,\quad f(1)=0\quad f(2^-)=-\infty\quad f(2^+)=+\infty,$$

czyli są dwie asymptoty $x=2$ i $y=1$.

$$\begin{aligned}f'(x)=&\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{4}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}\\ =&\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{-\frac{4}{3}}\left((x-2)-(x-1)\right)\\ =&\frac{-1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4}}.\end{aligned}$$

Widzimy, że $\lim_{x\to1}f'(x)=-\infty$ oraz $\lim_{x\to2}f'(x)=-\infty$ więc w punktach $(1,f(1))$ i $(2,f(2))$ styczna do wykresu f jest pionowa. Dla $x\neq1,2$ mamy $f'(x)<0$, więc funkcja jest malejąca.

$$f''(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{5}{3}}(x-2)^{-\frac{7}{3}}\left(\frac{1}{3}(x-2)+\frac{2}{3}(x-1)\right)=\frac{2(x-\frac{4}{3})}{3\sqrt[3]{(x-1)^5(x-2)^7}}.$$

Mamy

$$f''(x)\begin{cases}>0 & \text{i } f \text{ jest wypukła dla} \quad (1,\frac{4}{3})\cup(2,+\infty)\\ <0 & \text{i } f \text{ jest wklęsła dla} \quad (\frac{4}{3},2)\cup(-\infty,1)\end{cases}$$

Punktem przegięcia jest punkt $\frac{4}{3}$. Na podstawie tych wiadomości możemy naszkicować wykres funkcji f.

Definicja 12.3. *Niech f i F będą dwoma funkcjami określonymi na odcinku (a,b). Mówimy, że F jest* **pierwotną** *funkcji f, jeśli $F'=f$.*

Zachodzi następujące

Twierdzenie. *Jeśli* $F'(x) = 0 \quad \forall_{x\in(a,b)}$, *to* F *jest funkcją stałą.*

Istotnie, z twierdzenia 10.10 wynika, że jeśli $F'(x) = 0 \quad \forall_{x\in(a,b)}$, to f jest równocześnie niemalejąca i nierosnąca w przedziale (a,b), a więc dla dowolnych $x', x'' \in (a,b)$ jednocześnie zachodzi $f(x') \leqslant f(x'')$ i $f(x') \geqslant f(x'')$, skąd wynika, że f jest stała.

Wniosek. *Dla dowolnej funkcji* f, *jeśli* F *i* G *są pierwotnymi* f, *to* $F(x) = G(x) + c$.

Istotnie, $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$. Więc $F - G = c$, skąd $F = G + c$.

12.4. Przykłady

(a) Pierwotną funkcji stałej jest funkcja liniowa. Istotnie, dla dowolnej stałej c mamy $\frac{d}{dx}(cx+b) = c$.

(b) Pierwotna funkcji x^α, gdzie α jest liczbą wymierną $\neq -1$ jest $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c$. Istotnie, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right) = x^\alpha$.

(c) Pierwotną wielomianu $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x^1 + a_0$ jest wielomian

$$\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x + C.$$

(d) Pierwotną funkcji $fg' + f'g$ jest funkcja $fg + c$. Pierwotną funkcji $\frac{-f'}{f^2}$ jest funkcja $\frac{1}{f}$. Pierwotną funkcji $\frac{gf'-fg'}{g^2}$ jest funkcja $\frac{f}{g} + C$.

(e) Pierwotną funkcji $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ jest funkcja $\sqrt{1+x^2} + C$.

12.5. Później pokażemy, że dla każdej funkcji f ciągłej w przedziale (a,b) istnieje pierwotna, tzn. różniczkowalna funkcja F taka, że $F' = f$. Teraz zajmiemy się szukaniem funkcji pierwotnych dla funkcji zadanych wzorami. Nie zawsze funkcja pierwotna może być wyrażona wzorem.

Funkcję pierwotną funkcji f ciągłej w przedziale (a,b) oznaczamy przez

$$\int f(x)dx + C,$$

czyli

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx + C\right) = \frac{d}{dx}\int f(x)dx + \frac{d}{dx}C = \frac{d\int f(x)dx}{dx} = f(x).$$

Proces znajdowania pierwotnej $\int f(x)dx + C$ funkcji f nazywamy *całkowaniem.*

12.6. Oto niektóre reguły całkowania:

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx, \quad \int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$
$$\int c(f(x))dx = c\int f(x)dx, \quad \int (x+a)^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}(x+a)^{\alpha+1} \quad \text{dla} \quad \alpha \neq -1$$

Obliczmy

$$\begin{aligned}\int \left(3\sqrt[4]{x+1} + 2\sqrt[3]{2+x} - \frac{1}{x^2}\right)dx &= 3\int (x+1)^{\frac{1}{4}}dx + 2\int (2+x)^{\frac{1}{3}}dx - \int x^{-2}dx \\ &= \frac{12}{5}(x+1)^{\frac{5}{4}} + \frac{3}{2}(2+x)^{\frac{4}{3}} + x^{-1} + C.\end{aligned}$$

12.7. Całkowanie przez części. Ponieważ

$$\frac{d[f(x)g(x)]}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{więc} \quad \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx + C$$

Obliczmy
(a)

$$\begin{aligned}\int (x+1)^{100} x dx =& \frac{1}{101}(x+1)^{101}x - \int \frac{1}{101}(x+1)^{101}dx \\ =& \frac{1}{101}(x+1)^{101}x - \frac{1}{101\cdot 102}(x+1)^{102}.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int (x+a)^6(x+b)^2dx =& \frac{1}{7}(x+a)^7(x+b)^2 - \frac{2}{7}\int (x+a)^7(x+b)dx + C \\ =& \frac{1}{7}(x+a)^7(x+b)^2 - \frac{2}{7\cdot 8}(x+a)^8(x+b) + \frac{2}{7\cdot 8}\int (x+a)^8dx + C \\ =& \frac{1}{7}(x+a)^7(x+b)^2 - \frac{2}{7\cdot 8}(x+a)^8(x+b) + \frac{2}{7\cdot 8\cdot 9}(x+a)^9.\end{aligned}$$

12.8. Ponieważ

$$\frac{df(x)}{dx}, \quad \text{więc możemy formalnie napisać} \quad df(x) = f(x)dx.$$

Symbol $df(x)$ nazywamy różniczką funkcji f, a dx nazywamy różniczką x. Podobnie, definicja pierwotnej może być zapisana

$$\frac{d}{dx}\Big[\int f(x)dx\Big] = f(x) \quad \text{lub} \quad d\Big[\int f(x)dx\Big] = f(x)dx.$$

Możemy napisać formalne wzory

$$d(f+g) = df + dg \quad d(f-g) = df - dg \quad d(cf) = cdf \quad d(fg) = df\ g + f\ dg \quad \int fdg = fg - \int gdf + C.$$

Obliczmy (a)

$$\int (1+x)^6 x dx = \int x d(\frac{1}{7}(1+x)^7) = \frac{1}{7}(1+x)^7x - \int \frac{1}{7}(1+x)^7dx + C = \frac{1}{7}(1+x)^7x - \frac{1}{56}(1+x)^8 + C.$$

(b)

$$\begin{aligned}&\int (x+a)^6(x+b)^2dx = \int (x+b)^2 d[\frac{1}{7}(x+a)^7] = \frac{1}{7}(x+a)^7(x+b)^2 - \int \frac{1}{7}\int (x+a)^7 d[(x+b)^2] + C \\ =& \frac{1}{7}(x+a)^7(x+b)^2 - \frac{1}{7}(x+a)^7(x+b)^2 + \int (x+b)d[\frac{2}{7\cdot 8}(x+a)^8] + C \\ =& \frac{1}{7}(x+a)^7(x+b)^2 - \frac{1}{7}(x+a)^7(x+b)^2 + (x+b)\frac{2}{7\cdot 8}(x+a)^8 - \int \frac{2}{7\cdot 8}(x+a)^8 d[x+b] + C \\ =& \frac{1}{7}(x+a)^7(x+b)^2 - \frac{1}{7}(x+a)^7(x+b)^2 + (x+b)\frac{2}{7\cdot 8}(x+a)^8 - \frac{2}{7\cdot 8\cdot 9}(x+a)^9 + C\end{aligned}$$