Wykład z analizy

Tydzień 13.

Całka I

13.1. Twierdzenie o zamianie zmiennych. *Niech φ bedzie funkcją różniczkowalną na (α, β), a f bedzie funkcją ciągłą na zbiorze wartości φ (tak aby złożenie $f \circ \varphi$ było określone). Niech F będzie pierwotną funkcji f, czyli*

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Wtedy

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Używając zapisu w postaci różniczkowej, bardzo w tej sytuacji wygodnej, często piszemy

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d\varphi(t).$$

Dowód. Istotnie, wykorzystując regułę łańcuchową

$$\begin{aligned}\frac{dF(\varphi(t))}{dt} &= F'(\varphi(t))\varphi'(t)\\ &= f(\varphi(t))\varphi'(t),\end{aligned}$$

czyli $F(\varphi(t))$ jest istotnie funkcją pierwotną $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. □

Twierdzenie o zamianie zmiennych często wykorzystuje się do znalezienia pierwotnej $\int f(x)dx$. Dobieramy odpowiednią funkcję φ i podstawiamy $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$. Wtedy $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Jeśli prawą stronę da się policzyć, to musimy jeszcze znaleźć funkcję odwrotną do φ, żeby wyrazić t przez x.

13.2 Przykłady.

(a) Dla dowolnej funkcji ciągłej f i dla dowolnego $a \neq 0$ mamy

$$\int f(a \cdot x)dx = \frac{1}{a}F(ax)dx + C \quad \text{gdzie} \quad F' = f.$$

Istotnie, podstawiamy $z = ax$ więc (stosując zapis w postaci różniczkowej) $dz = adx$ czyli $dx = \frac{1}{a}dz$, więc $\int f(a \cdot x)dx = \frac{1}{a}\int f(z)dz$.

(b) Stosując podstawienie $x = \varphi(t)$, czyli, w zapisie w postaci różniczkowej $dx = \varphi'(t)dt$, obliczamy

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2}dt = \int \frac{d\varphi(t)}{\varphi(t)^2} = \int \frac{dx}{x^2}.$$

Ostatnia całka jest bardzo prosta do obliczenia, i wynosi

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$$

więc wracając do zmiennej t otrzymujemy

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2}dt = -\frac{1}{\varphi(t)} + C.$$

(c) Obliczymy następującą całkę

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+5x}} = \int (1+5x)^{-\frac{1}{3}}dx.$$

Podstawiamy (dla wprawy zamieniamy rolami literki x i t) $1+5x=t$ stąd $5dx=dt$ czyli $dx=\frac{1}{5}dt$. Mamy więc

$$\int (1+5x)^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{5}\int t^{-\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{5}\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{10}(1+5x)^{\frac{2}{3}}+C.$$

(d) Znajdziemy

$$\int \frac{(x-1)^3dx}{(1+(x-1)^4)^{\frac{1}{3}}}.$$

Podstawiamy $x-1=y$, $dx=dy$, a następnie znowu podstawiamy $1+y^4=z$, $y^3dy=\frac{1}{4}dz$. Wtedy

$$\int \frac{(x-1)^3dx}{(1+(x-1)^4)^{\frac{1}{3}}}=\int \frac{y^3dy}{(1+y^4)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^{\frac{1}{3}}}=\frac{3}{8}z^{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{8}(1+y^4)^{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{8}(1+(x-1)^4)^{\frac{2}{3}}+C.$$

Łatwo sprawdzić, różniczkując, że uzyskaliśmy prawidłową odpowiedź.

13.3. Definicja. *Funkcja f określona na odcinku (a,b) nazywa się* **kawałkami ciągła** *jeżeli jest ciągła, albo nieciągła w co najwyżej skończonej ilości punktów. Innymi słowy odcinek (a,b) można rozbić na skończenie wiele odcinków $(a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3],\ldots,[x_n,b)$ takich, że f jest ciągła na każdym z odcinków rozbicia (a,x_1), (x_1,x_2), $(x_2,x_3),...,(x_n,b)$.*

13.4. Definicja. *Niech M będzie podzbiorem $\mathbf{R}$. Funkcję określoną na $\mathbf{R}$ taką, że dla $x\in M$ jej wartość jest równa 1 a dla $x\notin M$ jej wartość jest 0 nazywamy funkcją charakterystyczną zbioru M i oznaczamy $\mathbf{1}_M$. Innymi słowy*

$$\mathbf{1}_M(x)=\begin{cases}1 & \text{dla } x\in M\\ 0 & \text{dla } x\notin M\end{cases}$$

13.5. Definicja. *Funkcja f określona na odcinku $[a,b]$ nazywa się* **prosta***, jeśli odcinek (a,b) można rozbić na skończenie wiele odcinków rozłącznych na których f jest stała.*

Niech funkcja prosta φ, określona na $[a,b]$ będzie określona przez

$$\varphi(x)=\begin{cases}\gamma_0 & \text{dla } x\in[a,x_1)\\ \gamma_1 & \text{dla } x\in[x_1,x_2)\\ \gamma_2 & \text{dla } x\in[x_2,x_3)\\ \vdots & \qquad\vdots\\ \gamma_n & \text{dla } x\in[x_n,b]\end{cases}\tag{13.6}$$

Wtedy, jak łatwo zauważyć, możemy napisać

$$\varphi(x)=\gamma_0\mathbf{1}_{[a,x_1)}(x)+\gamma_1\mathbf{1}_{[x_1,x_2)}(x)+\gamma_2\mathbf{1}_{[x_1,x_2)}(x)+\cdots+\gamma_n\mathbf{1}_{[x_n,b]}(x).$$

Oczywiście, funkcja prosta jest kawałkami ciągła.

13.7. Niech f będzie funkcją nieujemną na przedziale $[a,b]$. Przez

$$\int_a^b f(x)dx$$

oznaczamy „pole” obszaru ograniczonego wykresem funkcji od góry, osią x-ów od dołu i prostymi $x=a$ oraz $x=b$ bo bokach. Jeśli f przyjmuje wartości ujemne, to jej wykres, oś x-ów i proste $x=a$ oraz $x=b$ ograniczają pewien obszar powyżej osi x-ów (nazwijmy jego pole a_1) i pewien obszar poniżej (nazwijmy jego pole a_2). Przyjmujemy wtedy następującą definicję

$$\int_a^b f(x)dx=a_1-a_2.$$

Rzecz jasna „pole” nie jest pojęciem matematycznym i dlatego powyższa definicja $\int_a^b f(x)dx$, choć intuicyjnie poprawna, wymaga uściślenia. Dla funkcji prostej (13.6) jednak definicja ta jest oczywista, gdyż obszar pod wykresem łatwo rozłożyć na kilka nie zachodzących na siebie prostokątów, i ich pola można łatwo policzyć.

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \gamma_0(x_1 - a) + \gamma_1(x_2 - x_1) + \cdots + \gamma_n(b - x_n).$$

Tak zdefiniowana wielkość $\int_a^b f(x)dx$ musi mieć następujące trzy podstawowe własności, wynikające z intuicyjnie oczywistych własności „pola”.

(i) Jeśli f jest funkcją stałą, równą c, to

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

(ii) Jeśli $a \leqslant c \leqslant b$, to

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

(iii) Jeśli $f \leqslant g$, to

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

13.8. Twierdzenie. *Niech f będzie funkcją kawałkami ciągła i ograniczona w przedziale $[a, b]$. Istnieje wtedy dokładnie jedna liczba A taka, że*

$$\int_a^b \psi(x)dx \leqslant A \leqslant \int_a^b \varphi(x)dx \tag{13.9}$$

dla wszystkich funkcji prostych ψ i φ spełniających $\psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$.

Dowód tego twierdzenia zostawimy na później. Piszemy

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

A jako pole pod wykresem funkcji f (jeśli f jest nieujemna) dobrze oddaje intuicję. Zbiór $M = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ „pod wykresem funkcji f” ma „pole”, które nie jest większe niż pole każdej sumy prostokątów zawierających M i nie jest mniejsze niż pole każdej sumy prostokątów zwartych w M.

13.10. Pokażemy teraz jak dla funkcji f kawałkami monotonicznych można obliczyć $\int_a^b f(x)dx$ z dowolną dokładnością.

Ponieważ dla dowolnych punktów $a < x_1 < \cdots < x_n < b$ mamy

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_n}^b f(x)dx,$$

więc wystarczy przybliżyć każdą z całek $\int_a^{x_1} f(x)dx$, $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx, \cdots \int_{x_n}^b f(x)dx$, a potem sumę przybliżyć sumą. Funkcja f jest kawałkami monotoniczna, więc wybierzmy punkty $x_1, \ldots x_n$ tak, aby każdym z powyższych odcinków całkowania f była monotoniczna.

Załóżmy więc, że funkcja f jest niemalejąca na odcinku $[a, b]$. Dla funkcji nierosnącej postępujemy podobnie.

Podzielmy odcinek $[a, b]$ na N równych części $[a, b] = [a, x_1) \cup [x_1, x_2) \cup \cdots \cup [x_{N-1}, b]$. Części są równe, czyli

$$x_1 - a = x_2 - x_1 = \cdots = b - x_{N-1} = \frac{b-a}{N}.$$

Niech

$$\varphi(x) = f(x_1)\mathbf{1}_{[a,x_1)}(x) + f(x_2)\mathbf{1}_{[x_1,x_2)}(x) + \cdots + f(b)\mathbf{1}_{[x_{N-1},b]}(x)$$
$$\psi(x) = f(a)\mathbf{1}_{[a,x_1)}(x) + f(x_1)\mathbf{1}_{[x_1,x_2)}(x) + \cdots + f(x_{N-1})\mathbf{1}_{[x_{N-1},b]}(x).$$

Ponieważ funkcja f jest niemalejąca, więc dla $x \in [x_k, x_{k+1})$

$$\psi(x) = f(x_k) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{k+1}) = \varphi(x) \quad \text{czyli} \quad \psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x),$$

czyli

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \frac{b-a}{N}\left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(b)\right),$$
$$\int_a^b \psi(x)dx = \frac{b-a}{N}\left(f(a) + f(x_1) + \cdots + f(x_{N-1})\right),$$

skąd

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b \psi(x)dx = \frac{b-a}{N}(f(b) - f(a)).$$

Wynika stąd, że ponieważ

$$\int_a^b \psi(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)dx$$

mamy

$$\left|\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \frac{(b-a)|f(b) - f(a)|}{N}.$$

13.11. Przykłady. (a) Obliczymy $\int_0^{0,5}(1 + x^2)dx$ z dokładnością $0,03$.

(1) Ponieważ $b - a = 0,5$, $f(b) - f(a) = 1,25 - 1 = 0,25$, więc $(b - a)(f(b) - f(a)) = 0,125$. Aby otrzymać błąd mniejszy niż $0,03$ musimy wziąć N takie aby $\frac{0,125}{N} < 0,03$. Bierzemy $N = 5$, i dzielimy $[0,\ 0,5]$ na 5 podprzedziałów jednakowej długości

(2) Tworzymy tablicę wartości f:

x	0	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$
$f(x)$	1	$1,01$	$1,04$	$1,09$	$1,16$	$1,25$

(3) Obliczamy całkę funkcji prostej φ:

$$\int \varphi(x)dx = 0,1 \cdot (1,01 + 1,04 + 1,09 + 1,16 + 1,25) = 0,555.$$

Dokładna wartość naszej całki wynosi: $\int_0^{0,5}(1 + x^2)dx = 0,541(6)$.

(b) Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$ jest zbiorem punktów (x, y) takich, że $x^2+y^2 = 1$, $y \geqslant 0$. Jest to więc górna połówka okręgu. Pole pod tym okręgiem jest polem połówki koła. Ponieważ f jest rosnąca w przedziale $[-1, 0]$ i malejąca w przedziale $[0, 1]$ dla przybliżonego obliczenia całki $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}dx$ rozdzielamy ją na $\int_{-1}^0 \sqrt{1 - x^2}dx$ oraz $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx$, które są, ze względu na symetrię, równe. Obliczymy pierwszą całkę $\int_{-1}^0 \sqrt{1 - x^2}dx$ z dokładnością do $0,11$, i pomnożymy ją przez 2.

(1) Ponieważ $(b - a)|f(b) - f(a)| = 1$, więc bierzemy $N = 10$.

(2) Tworzymy tablicę

(13.12)

x	-1	$-0,9$	$-0,8$	$-0,7$	$-0,6$	$-0,5$	$-0,4$	$-0,3$	$-0,2$	$-0,1$	0
$f(x)$	0	$0,436$	$0,6$	$0,715$	$0,8$	$0,867$	$0,917$	$0,954$	$0,980$	$0,995$	1

(3) Obliczamy

$$\int_{-1}^0 \varphi(x)dx = \frac{1}{10}(0,436 + 0,6 + 0,715 + 0,8 + 0,867 + 0,917 + 0,954 + 0,980 + 0,995 + 1) = 0,8264$$
$$\int_{-1}^0 \psi(x)dx = \frac{1}{10}(0 + 0,435 + 0,6 + 0,714 + 0,8 + 0,866 + 0,916 + 0,953 + 0,979 + 0,994) = 0,7257$$

Widzimy, że $0,7257 \leqslant \int_{-1}^0 \sqrt{1 - x^2} \leqslant 0,8264$. Pamiętamy ze szkoły, że pole ćwiartki koła o promieniu 1 wynosi $\frac{\pi}{4} = 0,785....$