Wykład z analizy

Tydzień 14.

Całka II

Dla całki oznaczonej zachodzą wzory i), ii) oraz iii) bezpośrednio poprzedzające twierdzenie 13.8, oraz następujące wzory

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx \quad c \text{ stała}, \tag{14.1}$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx, \tag{14.2}$$

$$|f(x)| \leqslant M \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant |b-a|M. \tag{14.3}$$

Sprawdzenie własności (14.1)-(14.3) jest elementarne, ale nie będziemy go przytaczać.

14.4. Rozszerzamy pojęcie całki. Dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}$ określamy

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \int_a^b f(x)dx & \text{jeśli } a < b \\ 0 & \text{jeśli } a = b \\ -\int_b^a f(x)dx & \text{jeśli } b < a. \end{cases}$$

Stąd, dla wszelkich możliwych a, b i c zachodzi

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

14.5. Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego. *Niech f będzie funkcją kawałkami ciągłą i ograniczoną na przedziale $[a, b]$ i niech $c \in (a, b)$ będzie punktem w którym f jest ciągła. Wtedy*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(x)dx = f(c).$$

Innymi słowy, funkcja

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{14.6}$$

określona na $[a, b]$ jest różniczkowalna w każdym punkcie x w którym f jest ciągła, i w tych punktach

$$G'(x) = f(x). \tag{14.7}$$

Jeśli f jest ciągła wszędzie, to G jest wszędzie różniczkowalna, i powyższy wzór zachodzi dla wszystkich $x \in [a, b]$. G jest również wszędzie ciągła.

Oznacza to, w szczególności, że dla funkcji ciągłej pierwotna zawsze istnieje. Co więcej, może być obliczona przy pomocy (14.6).

Dowód. Mamy pokazać, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\left| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(x)dx - f(c) \right| < \epsilon \quad \text{dla wszystkich} \quad |h| < \delta. \tag{14.8}$$

Weźmy $\epsilon > 0$. Ponieważ f jest ciągła w punkcie c, więc istnieje $\delta > 0$ takie, że dla $x \in (c - \delta, c + \delta)$ mamy $f(c) - \epsilon < f(x) < f(c) + \epsilon$. Wynika stąd, że

$$(f(c) - \epsilon) \leqslant f(x) \leqslant (f(c) + \epsilon)$$

dla $x \in (c-\delta, c+\delta)$ skąd, dla $|h| < \delta$, całkując po przedziale $[c, c+h]$ otrzymujemy

$$\int_c^{c+h} (f(c) - \epsilon)dx \leqslant \int_c^{c+h} f(x)dx \leqslant \int_c^{c+h} (f(c) + \epsilon)dx.$$

Powyższe, po przekształceniu

$$\int_c^{c+h} dx = h$$

daje (14.8). Ciągłość G w dowolnym punkcie $x_0 \in [a, b]$ wynika natychmiast z ograniczoności f i z (14.3):

$$\begin{aligned} |G(x_0) - G(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(x)dx \right| \\ &\leqslant M \cdot |x_0 - x|. \end{aligned}$$

□

Wniosek. *Niech F będzie funkcją ciągła określoną na przedziale $[a, b]$ i niech f będzie funkcją ograniczoną, kawałkami ciągłą taką, że*

$$F'(x) = f(x)$$

dla wszystkich $x \in [a, b]$ poza, być może, skończoną ilością. Wtedy

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że f jest ciągła i $F'(x) = f(x)$ dla wszystkich $x \in [a, b]$. Niech $G(x) = \int_a^x f(t)dt$. Mamy udowodnić, że $G(b) = F(b) - F(a)$. Innymi słowy, jeśli $H(x) = G(x) - (F(x) - F(a))$, to $H(b) = 0$. Pokażemy, że $H(x) = 0$ dla wszystkich $x \in [a, b]$. Istotnie, na podstawie poprzedniego twierdzenia wiemy, że $G'(x) = f(x)$, skąd $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$. A więc H jest stała. Ale $H(a) = G(a) - F(a) + F(a) = 0$, czyli $H(x) = 0$. Jeśli f jest tylko kawałkami ciągła i $F'(x) \neq f(x)$ w pewnej, skończonej, ilości punktów, to przedział $[a, b]$ może być podzielony na skończenie wiele podprzedziałów i w każdym z nich, na mocy powyższego argumentu, mamy $H(x) \equiv 0$. Ale H jest ciągła na całym przedziale $[a, b]$ więc $H(x) = 0$ dla wszystkich $x \in [a, b]$, co kończy dowód. □

14.9. Wprowadźmy oznaczenie:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

W ten sposób, jeżeli F jest funkcją pierwotna f (całką nieoznaczoną funkcji f), to

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Został więc ustalony podstawowy związek między **pierwotną funkcji f i polem pod wykresem funkcji f.**

14.10. Przykłady. (a) Pierwotną funkcji $1 + x^2$ jest $x + \frac{x^3}{3}$. Więc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + x^2)dx = \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}.$$

(b) $\int_0^t x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^t = \frac{t^{n+1}}{n+1}$.

(c) Znajdziemy pole figury ograniczonej wykresem funkcji $x \to \sqrt{x-1}$, prostą x-ów i prostymi $x = 2$ i $x = 5$. Pole to jest równe

$$\int_2^5 \sqrt{x-1}dx = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^5 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.$$

14.11. Metoda całkowania przez części w przypadku całki oznaczonej przybiera postać następującego wzoru

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Wzór na całkowanie przez podstawienie wygląda następująco. Jeżeli φ jest funkcją na $[\alpha, \beta]$, mającą ciągłą pochodną, a f jest ograniczona i kawałkami ciągła na obrazie φ, to

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Przykład. Obliczmy całkę

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+5x}} = \int_0^1 (1+5x)^{-\frac{1}{3}}.$$

Podstawiamy $t = 1 + 5x$, czyli $dx = 1/5dt$. Dla $x = 0$ $t = 1$, a dla $x = t = 6$ i otrzymujemy

$$\int_0^1 (1+5x)^{-\frac{1}{3}}dx = \int_1^6 t^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}\Big|_1^6 = \frac{3}{10}(\sqrt[3]{36} - 1).$$