Wykład z analizy

Tydzień 15.

Pola figur płaskich i objętości brył

15.1. Niech R będzie obszarem na płaszczyźnie ograniczonym prostymi $x = a$, $x = b$, przy czym $a < b$, oraz wykresem funkcji ograniczonej, nieujemnej i kawałkami ciągłej $[a, b] \ni x \to f(x)$. Wtedy pole obszaru R jest *zdefiniowane* jako

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Ponieważ funkcja f jest nieujemna pole R jest liczbą nieujemną, zgodnie z naszą intuicją pola. Jeśli R jest obszarem ograniczonym przez proste $x = a$, $x = b$, przy czym $a < b$, oraz wykresem funkcji ograniczonej, kawałkami ciągłej $[a, b] \ni x \to f(x)$ od góry i wykresem funkcji ograniczonej, kawałkami ciągłej $[a, b] \ni x \to g(x)$ od dołu, przy czym $f(x) \geqslant g(x)$, to pole R *definiujemy* jako $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \geqslant 0$. Innymi słowy całkujemy długość $l(x) = f(x) - g(x)$ odcinka $[g(x), f(x)]$ od a do b.

15.2. Przykłady

(a) Niech R będzie obszarem ograniczonym przez wykres paraboli $y = x^2$, prostą $x = 0$ oraz prostą $y = 1$. Wtedy $l(t) = 1 - t^2$ $a = 0,\ b = 1$ a pole R jest równe

$$\int_0^1 (1 - t^2)dt = t - \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Zamieniając rolami oś x-ów z osią y-ów, wtedy długość odcinka poziomego $[0, x(y)]$ na poziomie y przecinającego obszar R wynosi $l(y) = \sqrt{y}$ dla $0 \leqslant y \leqslant 1$. Pole obszaru R może być obliczone jako

$$\int_0^1 l(y)dy = \int_0^i \sqrt{y}dy = \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

(b) Niech R będzie obszarem ograniczonym przez wykresy funkcji $y = x^3$ i $y = x$. Wtedy $a = -1$, $b = 1$,

$$l(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{dla } -1 \leq x \leq 0 \\ x - x^3 & \text{dla } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Stąd pole R wynosi

$$\int_{-1}^1 l(x)dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x)dx + \int_0^1 (x - x^3)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

(c) Niech R będzie obszarem ograniczonym przez parabolę $y = x^2$ i prostą styczną do paraboli w punkcie $(1, 1)$ i oś y- ów. Prosta styczna ma równanie $y = 2x - 1$, $a = 0$, $b = 1$, $l(x) = x^2 - 2x + 1$. Pole R wynosi

$$\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(d) Obliczmy pole koła o promieniu r. Wtedy $a = -r$, $b = r$ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $l(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}$. Stąd pole koła wynosi

$$\int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

Podstawiając $t = rx$, $dt = rdx$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2}dx &= 2\int_{-1}^1 \sqrt{r^2 - r^2t^2}\, rdt \\ &= 2r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2}dt. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy liczbę π wzorem

$$\pi = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = 4\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}dt.$$

Otrzymujemy znany wzór na pole koła o promieniu r pole $= \pi r^2$.

15.3. Niech B będzie bryłą w przestrzeni trójwymiarowej. Dla ustalonego t niech $A(t)$ będzie polem przekroju płaszczyzny $\{(x,y,z) : z = t\}$ z bryłą B. Załóżmy, że funkcja $\mathbf{R} \ni t \to A(t)$ jest funkcją kawałkami ciągłą ograniczoną i przyjmującą wartość 0 poza skończonym przedziałem $[a,b]$. Wtedy *definiujemy* objętość bryły B jako

$$V(B) = \int_a^b A(t)dt.$$

15.4 Przykłady

(a) Obliczymy objętość kuli B o promieniu r. Mamy

$$B = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$$

Dla ustalonego $-r \leqslant t \leqslant r$ $\{(x,y,z) : z = t\} \cap B$ jest kołem o promieniu $\sqrt{r^2 - t^2}$, czyli $A(t) = \pi(r^2 - t^2)$. Stąd

$$\begin{aligned} V(B) &= \int_{-r}^{r} [\pi(r^2 - t^2]dt \\ &= \pi\left(r^2 t - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_{-r}^{r} \\ &= \pi 2\frac{2}{3}r^3 \\ &= \pi\frac{4}{3}r^3. \end{aligned}$$

(b) Obliczmy objętość bryły obrotowej S, ograniczonej powierzchnią jaką otrzymujemy obracając parabolę $z = x^2$ dookoła osi z-ów i płaszczyzną poziomą $z = h$. Wtedy dla $0 \leqslant t \leqslant h$ $\{(x,y,z) : z = t\} \cap S$ jest kołem o promieniu $\sqrt{t}$, więc $A(t) = \pi t$ czyli

$$V(S) = \int_0^h \pi t dt = \pi\frac{h}{2}.$$