Wykład z analizy

Tydzień 16.

Długość krzywej

16.1. Niech γ będzie krzywą na płaszczyźnie, to znaczy $\gamma : [a,b] \to \big(x(t), y(t)\big) \in \mathbf{R}^2$. Zakładamy, że obie funkcje $t \to x(t)$ i $t \to y(t)$ są ciągłe i mają ciągłe pochodne na $[a,b]$. Przykładem, takiej krzywej jest wykres funkcji f określonej na $[a,b]$: $[a,b] \ni x \to \big(x, f(x)\big)$. Niech $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ będą punktami na odcinku $[a,b]$, rozdzielającymi $[a,b]$ na n odcinków równej długości h, to znaczy $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = ... = t_n - t_{n-1} = \frac{b-a}{n} = h$. Wtedy

$$a = t_0,\ a + h = t_1,\ a + 2h = t_2,\ \ldots\ , a + (n-1)h = t_{n-1},\ b = t_n.$$

Punkty

$$\big(x(t_0), y(t_0)\big),\ \big(x(t_1), y(t_1)\big),\ \big(x(t_2), y(t_2)\big),\ \ldots\ , \big(x(t_n), y(t_n)\big) \tag{1}$$

leżą na krzywej γ. Długością $|\gamma|$ krzywej γ nazywamy granicę długości łamanej łączącej punkty (1), gdy $n \to \infty$. Jak zaraz zauważymy, granica ta to po prostu całka z odpowiedniej funkcji. Dla ustalonych punktów $t_0, t_1, \ldots, t_n$ długość łamanej to suma długości n segmentów liniowych, od $\big(x(t_{i-1}), y(t_{i-1})\big)$ do $\big(x(t_i), y(t_i)\big)$, $i = 1, \ldots, n$. Długość takiego segmentu, z twierdzenia Pitagorasa, wynosi

$$\sqrt{\big(x(t_i) - x(t_{i-1})\big)^2 + \big(y(t_i) - y(t_{i-1})\big)^2}.$$

Korzystając z twierdzenia o wartości średniej otrzymujemy, że w każdym odcinku (t_{i-1}, t_i) muszą istnieć punkty $\eta_i,\ \chi_i$ takie, że

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = h\, x'(\chi_i),$$
$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = h\, y'(\eta_i).$$

Sumując wszystkie składniki, otrzymujemy długość łamanej

$$h\sqrt{\big(x'(\chi_1)\big)^2 + \big(y'(\eta_1)\big)^2} + h\sqrt{\big(x'(\chi_2)\big)^2 + \big(y'(\eta_2)\big)^2} + \cdots + h\sqrt{\big(x'(\chi_n)\big)^2 + \big(y'(\eta_n)\big)^2}.$$

Ponieważ pochodne funkcji $t \to x(t)$ i $t \to y(t)$ są ciągłe, więc, gdy $n \to \infty$ długość łamanej ma granicę, która jest równa całce

$$|\gamma| = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt. \tag{2}$$

Wzór (2) przyjmujemy jako **definicję** długości krzywej γ.

16.2. Jeśli krzywa γ jest wykresem funkcji, czyli $\gamma(x) = (x, f(x))$ dla $x \in [a,b]$, to

$$|\gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx,$$

gdyż

$$\frac{dx}{dx} = 1.$$

16.3. Przykłady: (a) Niech γ będzie odcinkiem łączącym punkty $(-2, 4)$ i $(3, 5)$. Z twierdzenia Pitagorasa, długość takiego odcinka wynosi $\sqrt{(3+2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{26}$. Z drugiej strony krzywą γ możemy zapisać jako $\gamma(x) = (x, \frac{1}{5}x + \frac{22}{5})$, $x \in [-2, 3]$. Wtedy

$$|\gamma| = \int_{-2}^{3} \sqrt{1 + \big(\frac{d(x/5 + 22/5)}{dx}\big)^2}\, dx = \int_{-2}^{3} \sqrt{1 + \frac{1}{25}}\, dx = \sqrt{26}.$$

(b) Znajdziemy długość wykresu krzywej $x \to y = x^{\frac{3}{2}}$ pomiędzy punktami dla których $x = 1$ i $x = 2$.

$$\int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx.$$

Podstawiamy $t = 1 + 9/4\, x$, $dx = 4/9\, dt$, i otrzymujemy

$$\int_{13/4}^{22/4} \sqrt{t}\frac{4}{9} dt = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{13/4}^{22/4} = \frac{22^{3/2} - 13^{3/2}}{27}.$$

(c) Zdefiniowaliśmy π jako $4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. Obliczymy długość ćwiartki okręgu o promieniu r, czyli długość wykresu krzywej $x \to y = \sqrt{r^2 - x^2}$ pomiędzy punktami $x = 0$ i $x = r$. Mamy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

a więc

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx &= \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx \\
&= \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 - \left(x/r\right)^2}}\, dx \\
&= r\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt \\
&= 2r\int_0^1 \sqrt{1 - s^2}\, ds.
\end{aligned}$$

Ostatniej równości dowodzimy następująco. Wykorzystujemy równość

$$\sqrt{1 - s^2} = \frac{1 - s^2}{\sqrt{1 - s^2}},$$

i całkowanie przez części.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1 - s^2}\, ds &= \int_0^1 \frac{1 - s^2}{\sqrt{1 - s^2}}\, ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}\, ds + \int_0^1 \frac{-s^2}{\sqrt{1 - s^2}}\, ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}\, ds + \int_0^1 \frac{-s}{\sqrt{1 - s^2}}\ s\, ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}\, ds + \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1 - s^2}\right)\ s\, ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}\, ds + s\sqrt{1 - s^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1 - s^2}\, ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}\, ds - \int_0^1 \sqrt{1 - s^2}\, ds.
\end{aligned}$$

Stąd

$$2\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\,ds = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds.$$

16.4. Niech $P=(a,\sqrt{1-a^2})$, $Q=(b,\sqrt{1-b^2})$, $-1\leqslant a\leqslant 0\leqslant b\leqslant 1$ będą dwoma punktami na okręgu o środku w punkcie $O=(0,0)$ i o promieniu 1. Długość łuku (górnego) okręgu pomiędzy punktami P i Q wynosi

$$\int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Obliczmy pole sektora koła POQ. Pole tego sektora to pole pod łukiem minus pola dwóch trójkątów prostokątnych

$$\text{pole sektora } OPQ = \int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{2}b\sqrt{1-b^2} + \frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2}. \tag{3}$$

Jeśli $0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$, to (3) też zachodzi.

Pokażemy teraz, że

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{2}b\sqrt{1-b^2} + \frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4}$$

Innymi słowy, biorąc pod uwagę poprzednie obliczenia otrzymamy, że pole sektora koła o promieniu 1 wynosi połowę długości łuku ograniczającego ten sektor. (4) jest oczywiście równoważne następującemu wzorowi

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{2}b\sqrt{1-b^2} + \frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2} - \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \tag{5}$$

Powyższe wyrażenie traktujemy jako funkcję zmiennej b, przy ustalonym a. Obliczamy pochodną

$$\begin{aligned}\frac{d}{db}&\left(\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{2}b\sqrt{1-b^2} + \frac{1}{2}a\sqrt{1-a^2} - \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\ &= \sqrt{1-b^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-b^2} + \frac{1}{2}\frac{b^2}{\sqrt{1-b^2}} + 0 - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Tak więc lewa strona (5) nie zależy od b (dla $a\leqslant b\leqslant 1$). Wystarczy więc sprawdzić jej wartość w jednym ustalonym punkcie. Kładąc $b=a$ otrzymujemy 0, co dowodzi (5). Podstawiając $a=0$, $b=1$ otrzymujemy wzór z przykładu 16.3. c):

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

16.5. Rozważmy okrąg o promieniu 1 i środku w $(0,0)$. Dla każdej liczby rzeczywistej θ wyznaczmy punkt na okręgu $P(\theta)$ w następujący sposób. Startując z punktu $(1,0)$ odmierzamy wzdłuż łuku okręgu odległość $|\theta|$, zgodnie z ruchem wskazówek zegara jeżeli $\theta<0$ i przeciwnie do ruchu wskazówek zegara jeżeli $\theta>0$. Uzyskany w ten sposób punkt oznaczamy $P(\theta)$. Zauważmy, że skoro długość całego okręgu wynosi 2π, to $P(\theta)=P(\theta+2\pi)$, dla każdego θ. Współrzędną y-ową punktu $P(\theta)$ nazywamy sinusem θ i oznaczmy $\sin(\theta)$, a współrzędną x-ową nazywamy kosinusem θ i oznaczamy $\cos(\theta)$. Zauważmy od razu, że

$$\begin{gathered}\cos(\theta+2\pi)=\cos(\theta), \qquad \sin(\theta+2\pi)=\sin(\theta),\\ \sin(\theta)^2+\cos(\theta)^2=1,\end{gathered} \tag{6}$$

dla wszystkich θ. Ze względu na symetrię okręgu, współrzędne x-owe punktów $P(\theta)$ i $P(-\theta)$ są takie same, podczas gdy ich współrzędne y-owe mają przeciwny znak. Innymi słowy sin jest funkcją nieparzystą, a cos parzystą.

Zauważmy, że funkcja $\cos(\theta)$ jest malejąca, od 1 do -1, gdy θ rośnie od 0 do π. Istotnie, gdy θ rośnie od 0 do π to $P(\theta)$ przebiega całą górną połówkę okręgu. Współrzędna x-owa $P(\theta)$ maleje więc od 1 do -1. Ograniczona do przedziału $[0, \pi]$ funkcja kosinus jest więc monotoniczna, i posiada odwrotną, określoną na przedziale $[-1, 1]$. Tę funkcję odwrotną oznaczamy $\arccos(x)$ i nazywamy arkus kosinus x. Zauważmy, że

$$\arccos(-1) = \pi \quad \arccos(1) = 0.$$

Podobnie, funkcja $\sin(\theta)$ jest rosnąca, od -1 do 1, gdy θ rośnie od $-\pi/2$ do $\pi/2$. Istotnie, gdy θ przebiega $[-\pi/2, \pi/2]$, $P(\theta)$ przebiega prawy półokrąg, od punktu $(0, -1)$ do $(0, 1)$. Współrzędna y-owa rośnie więc od -1 do 1. Funkcja sinus, ograniczona do przedziału $[-\pi/2, \pi/2]$ jest więc odwracalne, a jej odwrotną, określoną na przedziale $[-1, 1]$ nazywamy arkus sinus x i oznaczamy $\arcsin(x)$.

16.6. Ze wzoru (4) mamy

$$\int_x^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = x\sqrt{1-x^2} + 2\int_x^1 \sqrt{1-u^2}\, du,$$

jeżeli $-1 \leqslant x \leqslant 1$, i jest to długość łuku od punktu $(x, \sqrt{1-x^2})$ do punktu $(1, 0)$. Innymi słowy, dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$$\arccos(x) = \int_x^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = x\sqrt{1-x^2} + 2\int_x^1 \sqrt{1-u^2}\, du.$$

Pochodna $\arccos(x)$ jest więc łatwa do obliczenia

$$\frac{d\arccos(x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{dla} \quad |x| \leq 1.$$

Nietrudno zauważyć, że dla $x \in [-1, 1]$

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Tak więc

$$\frac{d\arcsin(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{dla} \quad |x| \leq 1.$$

Obliczymy teraz pochodne samych funkcji sin i cos. Rozważmy najpierw $0 < \theta < \pi$. Skorzystamy z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji odwrotnej. Oznaczając $x = cos(\theta)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{d\ \cos(\theta)}{d\theta} &= \frac{1}{d\arccos(x)/dx} = \frac{1}{-1/\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-\cos(\theta)^2}.\end{aligned}$$

Zauważmy, że skoro $\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 = 1$, i $\sin(\theta) > 0$ dla $0 < \theta < \pi$, więc $\sin(\theta) = \sqrt{1-\cos(\theta)^2}$. Więc,

$$\cos'(\theta) = -\sin(\theta).$$

Wykorzystując regułę łańcuchową różniczkujemy sinus

$$\begin{aligned}\frac{d\ \sin(\theta)}{d\theta} &= \frac{d\ \sqrt{1-\cos(\theta)^2}}{d\theta} = \frac{d\ \sqrt{1-\cos(\theta)^2}}{d\ \cos(\theta)}\ \frac{d\ \cos(\theta)}{d\theta} \\ &= \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{1-\cos(\theta)^2}}\,(-2\cos(\theta))\,(-\sin(\theta)) = \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sin(\theta)} \\ &= \cos(\theta).\end{aligned}$$

Rozważmy teraz $-\pi < \theta < 0$. Ponieważ $0 < -\theta < \pi$ korzystamy z własności parzystości i już policzonych pochodnych.

$$\begin{aligned}\frac{d\ \sin(\theta)}{d\theta} &= -\frac{d\ \sin(-\theta)}{d\theta} = \frac{d\ \sin(-\theta)}{d(-\theta)} = \cos(-\theta) = \cos(\theta), \\ \frac{d\ \cos(\theta)}{d\theta} &= \frac{d\ \cos(-\theta)}{d\theta} = -\frac{d\ \cos(-\theta)}{d(-\theta)} = \sin(-\theta) = -\sin(\theta).\end{aligned}$$

Korzystając z okresowości (6), uzyskujemy, że powyższe wzory zachodzą dla wszystkich θ nie będących całkowitymi wielokrotnościami π.