Wykład z analizy

Tydzień 17.

Funkcje trygonometryczne II

17.1. Niech $T \neq 0$ będzie liczbą rzeczywistą, a $x \mapsto f(x)$ funkcją określoną na całej prostej rzeczywistej. Mówimy, że f ma **okres**, lub jest **okresowa** z okresem T, jeżeli

$$f(x+T) \equiv f(x),$$

(znak $\equiv$ oznacza, że równość zachodzi dla wszystkich x z dziedziny). Zauważmy, że każda wielokrotność okresu jest również okresem. Najmniejszy dodatni okres funkcji nazywa się czasem **okresem podstawowym**. Możemy mówić o funkcji okresowej nawet jeżeli nie jest określona na całym $\mathbf{R}$, wtedy dziedzina D_f też musi być okresowa:

$$x \in D_f \Leftrightarrow x+T \in D_f.$$

Zauważmy następujące proste własności funkcji okresowych. Dowody pozostawiamy jako ćwiczenie.

(a) Jeżeli f ma okres T, i $g(x) = f(\alpha x)$, to g ma okres T/α (zakładamy że $\alpha \neq 0$).

(b) Jeżeli f ma okres T, i jest różniczkowalna, to f' też ma okres T. To obejmuje również przypadek gdy f jest różniczkowalna tylko w niektórych punktach. Wtedy zbiór punktów, w których jest różniczkowalna (czyli $D_{f'}$) jest okresowy o okresie T.

(c) Jeżeli f jest określona i ciągła w jakimś przedziale $[x_0, x_0+T]$, i $f(x_0) = f(x_0+T)$, to f można określić **jednoznacznie** na całej prostej $\mathbf{R}$ jako funkcję ciągłą i okresową z okresem T.

Podsumujmy osiągnięcia poprzedniego tygodnia

Twierdzenie 17.2. *Określiliśmy dwie ciągłe funkcje na* $\mathbf{R}$, $\sin\theta$ *i* $\cos\theta$. *Funkcje te posiadają następujące własności*

(i) *Funkcja* $\cos$ *jest parzysta, okresowa o okresie* 2π, *na przedziale* $[0,\pi]$ *jest funkcją odwrotną do*

$$\arccos x = \int_x^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad x \in [-1,1], \tag{1}$$

(czyli $x = \cos\theta$ *oznacza że* $\theta = \arccos x$*).*

(ii) *Funkcja* $\sin\theta$ *jest nieparzysta, okresowa o okresie* 2π *i na przedziale* $[0,2\pi]$ *dana wzorem*

$$\sin\theta = \sqrt{1-\big(\cos\theta\big)^2}. \tag{2}$$

(iii) *Każdy punkt* (x,y) *spełniający* $x^2+y^2=1$ *(czyli każdy punkt okręgu jednostkowego) można przedstawić jako* $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, *i to przedstawienie jest jedyne przy założeniu, że* $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

Powyższe własności (i) i (ii) całkowicie określają wprowadzone funkcje $\sin$ *i* $\cos$.

Przypomnijmy, że funkcje sin i cos zostały wprowadzone przy pomocy rozumowania geometrycznego, używaliśmy intuicji geometrycznej i pojęcia długości łuku, żeby każdemu $\theta \in \mathbf{R}$ przyporządkować punkt $P(\theta)$ na okręgu jednostkowym. Z drugiej strony korzystając z faktu, że własności (i)–(ii) całkowicie określają funkcje sin i cos, moglibyśmy zdefiniować je całkowicie analitycznie, korzystając właśnie z własności (i)–(ii). W przedziale $[0,\pi]$ funkcja cos mogłaby być zdefiniowana jako odwrotna do arccos zadanej przez (1). W tym samym przedziale sin można określić poprzez (2). Następnie obie funkcje określamy na przedziale $[-\pi,0)$ ustalając, że cos ma być parzysta, a sin nieparzysta. W ten sposób, korzystając z własności (c) funkcji okresowych sin i cos zostały określone na całym $\mathbf{R}$.

Twierdzenie 17.3. *Funkcje* $\sin$ *i* $\cos$ *są różniczkowalne,*

$$\sin'\theta = \cos\theta, \quad \cos'\theta = -\sin\theta.$$

Jako szczególny przykład zauważmy istnienie następujących dwóch granic

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\ \theta}{\theta} = \sin'\ \theta\big|_{\theta=0} = \cos\ 0 = 1,$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\ \theta - 1}{\theta} = \cos'\ \theta\big|_{\theta=0} = -\sin\ 0 = 0.$$

Warto zapamiętać te dwie granice, będą się często w przyszłości przydawać.

17.4. Ponieważ $\cos' x = -\sin x$ i $\sin' x = \cos x$, mamy

$$\cos'' x = -\cos x, \quad \sin'' x = -\sin x.$$

Innymi słowy funkcje cos i sin spełniają następujące **równanie różniczkowe**

$$f''(x) + f(x) = 0.$$

Twierdzenie 17.5. *Niech a i b będą dwoma ustalonymi liczbami. Niech*

$$f(x) = a\cos x + b\sin x. \tag{3}$$

Wtedy

$$f''(x) + f(x) = 0 \quad \textit{oraz} \quad f(0) = a, \quad f'(0) = b. \tag{4}$$

Zachodzi również twierdzenie odwrotne: jeśli f spełnia (4), to f jest postaci (3).

Dowód. Sprawdzenie, że funkcja postaci (3) spełnia (4) jest natychmiastowe. Udowodnimy teraz część odwrotną. Rozważmy najpierw szczególny przypadek $a = b = 0$. Udowodnimy, że jeśli f spełnia $f''+f = 0$ oraz $f(0) = f'(0) = 0$, to $f(x) \equiv 0$. Istotnie, rozważmy funkcję

$$\varphi(x) = f(x)^2 + f'(x)^2.$$

Wtedy $\varphi(0) = 0$ oraz

$$\varphi'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = 2f'(x)(f''(x) + f(x)) = 0.$$

Wynika stąd, że φ jest stała, a ponieważ $\varphi(0) = 0$, więc $\varphi \equiv 0$. Ponieważ φ jest sumą dwóch nieujemnych składników, więc każdy z nich musi być zerem. Wynika stąd, że $f(x) \equiv 0$. Załóżmy teraz, że f spełnia (4). Rozważmy funkcję

$$g(x) = f(x) - (a\cos x + b\sin x).$$

Wtedy, jak łatwo sprawdzamy, $g''(x) + g(x) = 0$ oraz $g(0) = g'(0) = 0$, skąd $g(x) \equiv 0$ czyli $f(x) = a\cos x + b\sin x$. $\square$

17.6. Z twierdzenia 17.5. wynikają następujące wzory

(5,) $$\sin(x + y) = \sin x \;\cos y + \cos x \;\sin y$$

(6) $$\cos(x + y) = \cos x \;\cos y - \sin x \;\sin y.$$

Istotnie, niech x będzie ustalone, a f i g będą funkcjami zmiennej y, $f : y \to \sin(x+y)$, $g : y \to \cos(x+y)$. Wtedy, jak łatwo sprawdzić

$$\frac{d^2 f(y)}{dy^2} = -f(y), \quad \frac{d^2 g(y)}{dy^2} = -g(y),$$

oraz

$$f(0) = \sin x, \quad f'(0) = \cos x, \quad g(0) = \cos x, \quad g'(0) = -\sin x.$$

Z powyższych równości i z twierdzenia 17.5 wynika (5) i (6).

17.7. Ze wzorów 17.6. otrzymujemy

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Podstawiając $y = \frac{\pi}{2}$ oraz $y = \pi$, mamy

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \sin(x + \pi) = -\sin x,$$
$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

17.8. Mamy również

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad \sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Istotnie, wykorzystując parzystość cos i nieparzystość sin otrzymujemy

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Dodając stronami otrzymujemy

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta.$$

Podstawiając $\alpha = (x+y)/2$ i $\beta = (x-y)/2$ otrzymujemy pierwszy wzór, a z drugim radzimy sobie podobnie.

Twierdzenie 17.5 ma następujące ważne uogólnienie.

Twierdzenie 17.9. *Niech $\omega > 0$ będzie ustaloną liczbą. Jeżeli f spełnia*

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = 0,$$

to jest postaci $f(x) = a\cos\omega x + \beta\sin\omega x$. Wtedy $a = f(0)$ i $b = 1/\omega f'(0)$.

Dowód. Podstawmy $F(t) = f(\frac{t}{\omega})$. Wtedy, jak łatwo sprawdzamy, $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ pociąga za sobą równanie $F''(t)+F(t) = 0$. Z twierdzenia 17.5 wynika, że $F(t) = a\cos t + b\sin t$ czyli podstawiając $t = \omega x$ mamy $f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$. $\square$

17.10. Zdefiniujmy dwie nowe funkcje, tangens

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

oraz kotangens

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Obie funkcje tg i ctg są funkcjami nieparzystymi, okresowymi o okresie π. Istotnie,

$$\operatorname{tg}(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\operatorname{tg}\theta, \quad \operatorname{tg}(\theta+\pi) = \frac{\sin(\theta+\pi)}{\cos(\theta+\pi)} = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta.$$

Podobnie z ctg. Funkcja tg jest określona na całym $\mathbf{R}$ z wyjątkiem nieparzystych wielokrotności $\pi/2$, (czyli dokładnie tych punktów, gdzie cos jest zerem), ściśle rosnąca w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a więc i w każdym przedziale $(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$, gdzie $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Istotnie,

$$\operatorname{tg}'\theta = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)' = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \operatorname{tg}^2\theta > 0.$$

Zauważmy też, rozważając jednostronne granice funkcji sin i cos, że

$$\lim_{\theta\to(\pi/2)^-} \operatorname{tg}\theta = +\infty, \quad \lim_{\theta\to(\pi/2)^+} \operatorname{tg}\theta = -\infty.$$

17.11. Łatwo sprawdzamy, że dla $\alpha, \beta, \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ mamy

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},$$

skąd

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{7}$$

Twierdzenie 17.12. *Funkcje* $\sin\theta$ *i* $\cos\theta$ *są funkcjami wymiernymi funkcji* $\mathrm{tg}\,(\theta/2)$*, to znaczy dla* θ *nie będącej nieparzystą wielokrotnością* π

$$\sin\theta = \frac{2\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}}, \quad \cos\theta = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}}.$$

Dowód. Kładąc $\alpha = \theta/2$ we wzorze (7) otrzymujemy (dla θ dodatkowo nie będącej nieparzystą wielokrotnością $\pi/2$)

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{2\mathrm{tg}\,(\theta/2)}{1-\mathrm{tg}^2(\theta/2)}.$$

Niech $t = \mathrm{tg}\,(\theta/2)$. Wtedy

(8) $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Mamy dalej

(9) $$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2\theta} &= \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = 1+\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2 \\ &= 1+\frac{4t^2}{1-2t^2+t^4} = \frac{1+2t^2+t^4}{1-2t^2+t^4} = \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2.\end{aligned}$$

Jeżeli $\pi/2 < |\theta| < \pi$ to $\cos\theta < 0$. Z drugiej strony mamy $\pi/4 < |\theta|/2 < \pi/2$, skąd $|\mathrm{tg}\,(\theta/2)| > 1$. Mamy więc $t^2 > 1$, więc $1-t^2 < 0$, więc w końcu $(1-t^2)/(1+t^2) < 0$. Podobnie sprawdzamy, że $\cos\theta$ i $(1-t^2)/(1+t^2)$ mają ten sam znak jeśli $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Z (9) mamy więc

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Bez trudu sprawdzamy, że wzór ten zachodzi także jeżeli θ jest nieparzystą wielokrotnością $\pi/2$, obie strony są wtedy zerami. Podobnie dowodzimy równości dla sinusa

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}. \quad \square$$

17.13. Ponieważ funkcja tg θ jest funkcją ściśle rosnącą na przedziale $(-\pi/2, \pi/2)$, przyjmującą wszystkie wartości rzeczywiste, wiec istnieje funkcja arctg u, odwrotna do niej

$$(-\infty, +\infty) \ni u \to \mathrm{arctg}\ u \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Mamy, dla $u = \mathrm{tg}\ \theta$

$$\frac{d\ \mathrm{arctg}\ u}{du} = \frac{1}{\frac{d\ \mathrm{tg}\ \theta}{d\theta}} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\theta} = \frac{1}{1+u^2}.$$

Ponieważ $\mathrm{tg}\ 0 = 0$, więc $\mathrm{arctg}\ 0 = 0$. Wynika stąd więc, że

$$\mathrm{arctg}\ u = \int_0^u \frac{dt}{1+t^2}.$$

Całkując przez podstawienie można zauważyć, że arctg u jest funkcją nieparzystą.

17.14. Otrzymujemy stąd nowy dowód znanego już faktu

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

a więc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Istotnie, ponieważ $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, więc $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, i $\operatorname{arctg}\ 1 = \pi/4$. Czyli

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg}\ 1 - \operatorname{arctg}\ 0 = \pi/4.$$

Z drugiej strony

$$\int_1^A \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg}\ u\Big|_1^A = \operatorname{arctg} A - \frac{\pi}{4}.$$

Ponieważ

$$\lim_{\theta\to(\pi/2)^-} \operatorname{tg}\ \theta = \infty,$$

więc

$$\lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg}\ A = \frac{\pi}{2}.$$

Tak więc istnieje całka niewłaściwa

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg}\ A - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Pozostałych równości dowodzimy wykorzystując nieparzystość funkcji $\operatorname{arctg}\ u$.

Funkcja $\operatorname{arctg}\ u$ jest bardzo pomocna przy obliczaniu całek, jak się wkrótce okaże.
Przykłady: (a) Obliczymy

$$\int_2^3 \frac{x\,dx}{1+x^4}.$$

Ponieważ $(x^2/2)' = x$, piszemy

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{xdx}{1+x^4} &= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{x=2}^{x=3} d(\operatorname{arctg}(x^2)) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)\Big|_{x=2}^{x=3} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 9 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 4.\end{aligned}$$

(b) Obliczmy

$$\int \frac{dz}{z^2+2z+2} = \int \frac{dz}{1+(z+1)^2} = \operatorname{arctg}(z+1).$$