Wykład z analizy

Tydzień 18.

Logarytm i funkcja wykładnicza

18.1. Szukamy funkcji ciągłej φ określonej na $\mathbf{R}^+$, która „zamienia mnożenie na dodawanie”, to znaczy spełnia równanie

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y). \tag{1}$$

Podstawiając $x = y = 1$ otrzymujemy $\varphi(1) = 2\varphi(1)$, stąd funkcja φ spełniająca (1) musi mieć własność $\varphi(1) = 0$. Załóżmy, że φ jest różniczkowalna. Wtedy dla ustalonego $x > 0$

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi\Big(x\big(1+\frac{h}{x}\big)\Big) - \varphi(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x) + \varphi\big(1+\frac{h}{x}\big) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi\big(1+\frac{h}{x}\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \frac{\varphi\big(1+\frac{h}{x}\big)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{k\to 0} \frac{\varphi(1+k)}{k} \\
&= \frac{1}{x}\varphi'(1).
\end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x}\varphi'(1),$$

czyli pochodna $\varphi(x)$ musi być wielokrotnością $1/x$. Widzimy więc, że każda funkcja (różniczkowalna) spełniająca (1) jest całkowicie wyznaczona przez stałą $c = \varphi'(1)$ i wobec $\varphi(1) = 0$ musi mieć postać

$$\varphi(x) = \int_1^x c\,\frac{1}{t}\,dt = c\int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Najnaturalniejszym wyborem jest oczywiście $c = 1$. Wtedy nasza funkcja φ spełniająca (1) nazywa się logarytmem naturalnym ($\log x$). Przyjmujemy więc następującą definicję logarytmu naturalnego

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad \text{dla} \quad x > 0. \tag{2}$$

Na tym wykładzie logarytm naturalny będziemy nazywali po prostu logarytmem. Jeżeli $\varphi(x)$ spełnia (1), $\varphi'(1) = 1$, to musi mieć postać (2). Sprawdzimy, że logarytm naturalny istotnie spełnia (1).

$$\begin{aligned}
\log(xy) &= \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} \\
&= \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^y \frac{ds}{s} \\
&= \log x + \log y,
\end{aligned}$$

gdzie w drugiej całce zastosowaliśmy podstawienie $t = xs$.

Zainteresowanie funkcją $\varphi(x)$ spełniającą (1) wiąże się z faktem, że numerycznie liczby znacznie łatwiej jest dodawać niż mnożyć. Fakt, że logarytm naturalny jest także całką nieoznaczoną funkcji $1/x$ jest dla nas znacznie bardziej interesujący.

18.2. Łatwo sprawdzić następujące własności logarytmu naturalnego

$$\log\frac{x}{y} = \log x - \log y. \tag{3}$$

Wynika to z następujących równości

$$0 = \log 1 = \log\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \log x + \log\frac{1}{x}, \quad \text{skąd} \quad \log\frac{1}{x} = -\log x. \tag{4}$$

Następnie

$$\log\frac{x}{y} = \log x + \log\frac{1}{y} = \log x - \log y,$$

i dostajemy (3). Jeśli $r \in \mathbf{Q}$ to

$$\log x^r = r\log x. \tag{5}$$

Rozważmy najpierw r naturalne, $r = 1, 2, \ldots$

$$\log x^m = \log x + \cdots + \log x = m\log x.$$

Łącząc powyższe z (4) otrzymujemy (5) dla dowolnego r całkowitego. Dalej, dla n naturalnego

$$\log x = \log x^{1/n}\cdots x^{1/n} = n\ \log x^{1/n}, \quad \text{skąd} \quad \log x^{1/n} = \frac{1}{n}\log x.$$

W końcu, jeżeli $r = m/n$, to

$$\log x^{m/n} = \log\left(x^{1/n}\right)^m = m\ \log x^{1/n} = \frac{m}{n}\log x,$$

co daje (5).

18.3. Zauważmy, że logarytm jest funkcją rosnącą na $(0, +\infty)$, (gdyż $\log' x = 1/x > 0$), wklęsłą, (gdyż $\log'' x = -1/x^2 < 0$) oraz

$$\lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+}\log x = -\infty. \tag{6}$$

Zauważmy, że skoro $\log 1 = 0$, a logarytm jest funkcją rosnącą, więc $\log x > 0$ dla $x > 1$ i $\log x < 0$ dla $x < 1$. Czyli, w szczególności $\log 2 > 0$. Stąd, jeżeli $x > 2^n$ to

$$\log x > \log 2^n = n\ \log 2.$$

To pokazuje pierwszą granicę w (6). Żeby udowodnić drugą, wystarczy zauważyć, że gdy $x \to 0^+$ to $1/x \to +\infty$, więc $\log(1/x) \to +\infty$, a $\log(1/x) = -\log x$.

18.4. Ponieważ $\log : \mathbf{R}^+ \ni x \to \int_1^x \frac{dx}{x}$ jest funkcją ciągłą, $\log 1 = 0$, oraz $\lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty$, więc istnieje liczba $e > 1$ taka, że $\log e = 1$. Jeśli $a > 0$, $a \neq 0$ jest dowolną liczbą dodatnią definiujemy logarytm *o podstawie* a jako

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Logarytm o podstawie a jest więc wielokrotnością logarytmu naturalnego. Stała wielokrotności jest dodatnia jeżeli $a > 1$ i ujemna jeżeli $a < 1$ Oczywiście funkcja $x \to \log_a x$ ma wszystkie własności opisane w 18.2. Jeżeli $a > 1$ to $\log_a x$ ma też własności opisane w 18.3., a gdy $a < 1$, to logarytm przy podstawie a jest oczywiście funkcją malejącą, wypukłą, spełniającą

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+}\log_a x = +\infty.$$

18.5. Rozważmy funkcję $f(x) = \log|x|$ określoną na całej prostej $\mathbf{R}$ z wyjątkiem 0. Funkcja f jest różniczkowalna (poza punktem 0) oraz

$$\frac{d\ f(x)}{dx} = \frac{1}{x} \quad x \neq 0.$$

Wystarczy sprawdzić powyższą równość dla $x < 0$, gdyż dla $x > 0$ wynika wprost z definicji (2). Jeżeli $x < 0$ to

$$\frac{d\ \log|x|}{dx} = \frac{d\ \log(-x)}{dx} = \frac{d\ \log(-x)}{d(-x)}\frac{d\ (-x)}{dx} = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$$

18.6 Zauważmy następujące zastosowanie w całkowaniu. Jeśli funkcja φ jest różna od zera w przedziale $[a,b]$ i ciągła, to

$$\int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \log|\varphi(x)||_a^b = \log|\varphi(b)| - \log|\varphi(a)|.$$

18.7. Przykłady: (a) Znajdziemy pierwotną funkcji

$$f(x) = \frac{x^{99}}{1+x^{100}}.$$

Niech $\varphi(x) = 1 + x^{100}$. Wtedy $\varphi'(x) = 100\ x^{99}$), skąd

$$\int \frac{x^{99}}{1+x^{100}}dx = \frac{1}{100}\log(1+x^{100}) + C.$$

(b) $\int \operatorname{tg}\theta\ d\theta = \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta = -\log|\cos\theta| + C.$
(c) $\int \operatorname{ctg}\theta\ d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta = \log|\sin\theta| + C.$
(d) $\int \operatorname{arctg} x\ dx = x\operatorname{arctg} x - \int x d\operatorname{arctg} x = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$
(e) $\int \log x\ dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\ dx = x\log x - x + C.$
(f) $\int x\log x\ dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\ dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C.$
(g) $\int \frac{dx}{x\log x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\log x}dx = \log|\log x| + C.$
W powyższych przykładach wszędzie zakładamy że $x \in (a,b)$, gdzie przedział jest tak dobrany, żeby wszystkie funkcje całkowane określone i ciągłe w (a,b).

18.8. Dla ustalonego $a > 0$, $a \neq 1$ i dowolnego $x \in \mathbf{R}$ określamy a^x jako taką liczbę rzeczywistą y, że

$$\log_a y = x.$$

Dla wygody określmy też $1^x = 1$ dla wszystkich $x \in \mathbf{R}$. Jeżeli $x = m/n$ jest liczbą wymierną, to powyższa definicja a^x zgadza się ze starą definicją wymiernej potęgi liczby a. Wynika to natychmiast z własności (5)

$$\log_a\left(a^{m/n}\right) = \frac{m}{n}\log_a a = \frac{m}{n}.$$

Innymi słowy, jeżeli $a \neq 0$ to funkcja $x \to a^x$ określona na $\mathbf{R}$ o wartościach w $\mathbf{R}^+$ jest funkcją odwrotną do $\log_a y$. Jako funkcja odwrotna do funkcji monotonicznej i ciągłej

$$\mathbf{R} \ni x \to a^x \in R^+$$

jest funkcją ciągłą i monotoniczną, ściślej rosnącą dla $a > 1$ i malejącą dla $a < 1$. Tak zdefiniowana funkcja nazywa się funkcją **wykładniczą**. Szczególny przypadek e^x jest jedną z najważniejszych funkcji w matematyce. Łatwo sprawdzamy następujące fakty:

$$\log e^x = x, \quad e^{\log u} = u, \quad u > 0, \quad a^{x+y} = a^x a^y, a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

Zauważmy, że dla dowolnego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi

$$\log a^x = x\ \log a. \tag{7}$$

Istotnie, równość $s = a^x$ oznacza, że $\log_a s = x$. Ale $\log_a s = \log s/\log a$, co dowodzi (7). Łatwo wynikają z tego następujące równości

$$a^x = e^{x\log a}, \quad (a^x)^y = a^{x,y}.$$

18.9. Mamy następujący wzór

$$\frac{d\ e^x}{dx} = e^x.$$

Istotnie, dla $u = e^x$

$$\frac{d\ e^x}{dx} = \frac{1}{\frac{d\ \log u}{du}} = \frac{1}{\frac{1}{u}} = u = e^x.$$

Dla $a > 0$ mamy

$$\frac{d\ a^x}{dx} = \frac{d\ e^{x \log a}}{dx} = e^{x \log a}(\log a) = (\log a)a^x.$$

18.10. Dla dowolnego $\alpha \in \mathbf{R}$ definiujemy *funkcję potęgową* na $\mathbf{R}^+$

$$x \to x^\alpha = e^{\alpha \log x}.$$

Oczywiście dla $\alpha = m/n$ wymiernego, tak zdefiniowana funkcja jest identyczna z funkcją potęgową zdefiniowaną wcześniej

$$e^{m/n\ \log x} = e^{1/n \log x + \cdots + 1/n \log x} = e^{1/n \log x} \cdot \ldots \cdot e^{1/n \log x} = \left(e^{1/n \log x}\right)^m.$$

Z drugiej strony

$$x = e^{\log x} = e^{1/n \log x + \cdots + 1/n \log x} = e^{1/n \log x} \cdot \ldots \cdot e^{1/n \log x} = \left(e^{1/n \log x}\right)^n,$$

skąd

$$e^{1/n \log x} = x^{1/n}.$$

Widzimy więc, że

$$x^{m/n} = e^{m/n \log x},$$

gdzie z lewej strony występuje potęga w starym sensie. Mamy

$$\frac{d\ x^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Istotnie,

$$\frac{d\ x^\alpha}{dx} = \frac{d\ e^{\alpha \log x}}{dx} = e^{\alpha \log x} \frac{d\ \alpha \log x}{dx} = e^{\alpha \log x} \frac{\alpha}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Widzimy, że dla $\alpha > 0$ funkcja potęgowa jest rosnąca oraz (wprost z definicji)

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0. \tag{8}$$

Dla $\alpha < 0$ funkcja potęgowa jest malejąca i

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty.$$

Przykład. Niech $f : \mathbf{R}^+ \ni x \to x^x \in \mathbf{R}^+$. Mamy

$$\frac{d\ f(x)}{dx} = \frac{d\ e^{x \log x}}{dx} = e^{x \log x} \frac{d\ x \log x}{dx} = x^x(\log x + 1).$$

18.11. Funkcja wykładnicza e^x jest jedynym rozwiązaniem następującego równania różniczkowego

$$f'(x) = f(x) \quad \text{z warunkiem początkowym} \quad f(0) = 1. \tag{9}$$

Udowodniliśmy już, że e^x spełnia (9). Teraz załóżmy, że funkcja f spełnia (9). Rozważmy funkcję $g(x) = e^{-x} f(x)$.

$$g'(x) = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^{-x}(f(x) - f(x)) = 0.$$

Czyli g jest funkcją stałą, ale $g(0) = f(0) = 1$, więc $e^{-x}f(x) = 1$, skąd $f(x) = e^x$.

18.12. Podobnie funkcja

$$f(x) = Ae^{\alpha x}$$

jest jedynym rozwiązaniem równania różniczkowego

$$f'(x) = \alpha f(x) \quad \text{z warunkiem początkowym} \quad f(0) = A.$$

18.13. Pokażemy, teraz, że dla dużych x funkcja wykładnicza jest większa od dowolnej funkcji potęgowej. To znaczy, że dla każdego α

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty. \tag{10}$$

Oczywiście wystarczy udowodnić (10) dla $\alpha > 0$, czyli w przypadku gdy i licznik i mianownik dążą do $+\infty$. Rozważmy funkcję pomocniczą $\varphi(t) = e^t - 1 + t$. Mamy $\varphi'(t) = e^t + 1$, więc funkcja φ jest rosnąca. Ponieważ $\varphi(0) = 0$, więc $\varphi(t) > 0$ dla $t > 0$, czyli

$$e^t - 1 - t > 0 \quad \text{dla} \quad t > 0.$$

Stąd

$$e^t > 1 + t \quad \text{czyli} \quad \frac{e^t}{t} > 1 + \frac{1}{t} > 1, \quad t > 0.$$

Weźmy dowolne $\alpha > 0$ i niech $N > \alpha$ będzie liczbą naturalną. Podstawiając $t = x/N$ i dzieląc przez N otrzymujemy

$$\frac{e^{x/N}}{x} > \frac{1}{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^x}{x^N} = \left(\frac{e^{\frac{x}{N}}}{x}\right)^N > \frac{1}{N^N}.$$

mamy więc, wobec (8)

$$\frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{e^x}{x^N} x^{N-\alpha} > \frac{1}{N^N} x^{N-\alpha} \to +\infty \quad \text{gdy} \quad x \to +\infty.$$

18.14. Jako wniosek otrzymujemy następującą granicę. Dla dowolnego $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log x} = +\infty. \tag{11}$$

Podstawmy $\log x = y$.

$$\frac{x^\alpha}{\log x} = \frac{e^{\alpha y}}{y} = \left(\frac{e^y}{y^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha.$$

Gdy $x \to +\infty$ to $y \to +\infty$, więc z (10) $e^y/y^{(1/\alpha)} \to +\infty$, a wtedy, z (8) mamy

$$\left(\frac{e^y}{y^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha \to +\infty.$$

co pociąga (11). W skrócie można powiedzieć, że funkcja wykładnicza rośnie szybciej od każdej potęgowej, a dowolna potęgowa szybciej od logarytmu. Warto pamiętać, że funkcja wykładnicza rośnie bardzo szybko, a logarytm bardzo wolno.

Twierdzenie 18.15. *Dla dowolnego α mamy*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha. \tag{12}$$

Dowód. Wstawiając $x = \frac{1}{h}$ (12) przyjmuje postać

$$\lim_{h\to 0^+} (1 + \alpha h)^{1/h} = e^\alpha.$$

Ponieważ e^x jest funkcją ciągłą, wystarczy udowodnić

$$\lim_{h\to 0^+} \log(1+\alpha h)^{1/h} = \alpha.$$

Dowodzimy tego następująco

$$\log(1+\alpha h)^{1/h} = \frac{1}{h}\log(1+\alpha h) = \frac{1}{h}\left(\log(1+\alpha h) - \log 1\right) = \alpha\, \frac{\log(1+\alpha h)-\log 1}{\alpha h}.$$

Gdy $h \to 0^+$ ostatni ułamek dąży do pochodnej logarytmu w 1.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\log(1+\alpha h)-\log 1}{\alpha h} = \alpha \frac{d\ \log x}{dx}\bigg|_{x=1} = \alpha\ \frac{1}{x}\bigg|_{x=1} = \alpha. \quad \square$$

19.14. Mamy następujący znany wzór, w niektórych podręcznikach przyjmowany jako definicja liczby e

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$