Wykład z analizy

TYDZIEŃ 19.

FUNKCJA WYKŁADNICZA – ZASTOSOWANIA

19.1. **Procent składany**. Inwestor wpłaca kwotę N złotych do banku, przy stopie procentowej a. Jeśli kapitalizacja odsetek następuje raz w roku, to po upływie roku do lokaty dopłacona zostaje kwota odsetek $N\alpha$, gdzie $\alpha = a/100$. Jeżeli kapitalizacja odsetek następuje kwartalnie (częsta ostatnio sytuacja), to należne odsetki dopisywane są do lokaty 4 razy w roku. W ten sposób efektywny zysk procentowy z lokaty jest wyższy, niż nominalna stopa procentowa a. Lokata N złotych po pierwszym kwartale urasta do $(1+\alpha/4)N$ (doliczono 1/4 należnych odsetek) i ta kwota staje się kapitałem podlegającym oprocentowaniu w dalszym okresie. Ten sam proces następuje pod koniec każdego kwartału. Po roku wartość lokaty wyniesie

$$(1 + \alpha/4)^4 N.$$

Im częstsza kapitalizacja odsetek, tym wyższy zysk. Przy kapitalizacji n-krotnej w ciągu roku, kapitał N złotych po roku urasta do

$$(1 + \alpha/n)^n N.$$

Jak widać zysk rośnie przy każdym zwiększeniu częstotliwości kapitalizacji, ale nie wzrasta bez ograniczeń. Lokata inwestora maksymalnie, po roku, przy ciągłej kapitalizacji wyniesie, zgodnie z obliczeniami z poprzedniego tygodnia

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \alpha/n)^n N = e^\alpha N.$$

Na przykład, jeżeli $\alpha = 0,15$ (lokata na 15 %), to efektywny zysk wyniósłby około 16,18 %. Związek procesu składanego procentu z funkcją wykładniczą przy częstej kapitalizacji odsetek (lub, równoważnie przy wieloletnim okresie trwania inwestycji) sugeruje bardzo szybki wzrost wartości inwestycji. W 1626 roku holenderski osadnik Peter Minuit kupił od rdzennych mieszkańców (Indian) wyspę Manhattan, za kwotę 60 guldenów, porównywalną do około 24 dzisiejszych dolarów. Transakcja ta stanowi przysłowiowy przykład dobrego interesu. Czy rzeczywiście był to tak dobry interes? Gdyby holenderski osadnik zamiast kupować wyspę w 1626 roku zainwestował kwotę 24 dolarów na 10 % rocznie, to w dniu dzisiejszym jego spadkobiercy dysponowaliby kwotą

$$24 \cdot 1,1^{375} \simeq 8 \cdot 10^{16}$$

dolarów.

19.2. **Wzrost populacji**. Rozważmy populację bakterii, które dla uproszczenia naszych rozważań nigdy nie umierają. Niech $N(t)$ będzie ilością bakterii w chwili t. Każda bakteria, przy wystarczającej ilości miejsca i pożywienia co jakiś czas się dzieli, wydając na świat nową bakterię. Ustalmy miarę czasu, na przykład niech czas t będzie mierzony w sekundach, i niech bakterie dzielą się średnio co ρ sekund. W takim razie po upływie krótkiego czasu h (w czasie którego liczbę $N(t)$ można uznać za stałą) liczebność populacji wzrośnie o $N(t)\ h/\rho$. Widzimy więc, że funkcja $N(t)$ spełniać będzie równanie różniczkowe

$$N'(t) = \alpha N(t), \quad \alpha = 1/\rho.$$

Jak wiemy jedynym rozwiązaniem powyższego równania jest funkcja

$$N(t) = N_0 e^{\alpha\ t}, \quad N_0 = N(0).$$

Wzrost populacji będzie więc bardzo szybki — wykładniczy.

Jeżeli bakterie nie są nieśmiertelne, a stopa umieralności populacji wynosi β (czyli w jednostce czasu w populacji $N(t)$ umiera $\beta N(t)$ osobników), to, jak łatwo sprawdzić, $N(t) = N_0 e^{(\alpha-\beta)\ t}$. Populacja będzie rosła bądź wymierała — wykładniczo.

Jeżeli populacja bakterii osiągnie duże rozmiary, to jej dalszy wzrost będzie utrudniony. Brakować będzie miejsca lub pożywienia. Wyobraźmy sobie sytuację, gdy tempo wzrostu populacji $dN(t)/dt$ jest proporcjonalne do iloczynu $N(t)$ oraz $M - N(t)$, gdzie M jest „pojemnością środowiska”. Otrzymujemy tak zwane równanie logistyczne

$$N'(t) = \alpha N(t)(M - N(t)). \tag{1}$$

Bardzo wiele populacji występujących w przyrodzie rozwija się zgodnie z równaniem logistycznym. Używając zapisu różniczkowego możemy zapisać (1) jako

$$\frac{d\,N}{N(M-N)} = \alpha dt.$$

Całkując obie strony otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int \frac{d\,N}{N(M-N)} &= \frac{1}{M}\int \frac{d\,N}{N} + \frac{1}{M}\int \frac{d\,N}{M-N} \\ &= \frac{1}{M}\log|N| - \frac{1}{M}\log|M-N| \\ &= \alpha t + C.\end{aligned}$$

Otrzymujemy więc

$$\frac{|N|}{|M-N|} = C' e^{M\alpha t}, \quad C' = e^{MC},$$

gdzie C' jest jakąś stałą dodatnią. Nietrudno się przekonać, że $M-N$ zachowuje znak, czyli

$$\frac{N(t)}{M-N(t)} = C'' e^{M\alpha t},$$

gdzie C'' jest dowolną stałą dodatnią bądź ujemną. Rozwiązując ze względu na $N(t)$ otrzymujemy

$$N(t) = \frac{C_1 e^{M\alpha t}}{1+C_2 e^{M\alpha t}} = \frac{c_1}{1+c_2 e^{-M\alpha t}}.$$

Wykres $N(t)$ to znana w biologii krzywa logistyczna.

19.3. **Eksplozja populacji**. Załóżmy teraz, że przyrost populacji jest proporcjonalny nie do ilości osobników w populacji, ale do ilości par tej populacji, czyli że *każda para* osobników tej populacji produkuje potomstwo. Ilość par w populacji N jest oczywiście $\frac{N(N-1)}{2} \sim \frac{N^2}{2}$ gdy N jest duże. Mamy wtedy

$$N'(t) = \alpha N(t)^2.$$

Całkując powyższe równanie otrzymujemy

$$\int_0^t \frac{N'(s)}{N^2(s)} ds = \alpha t,$$

skąd

$$-\frac{1}{N(t)} + \frac{1}{N(0)} = \alpha t,$$

czyli dalej

$$N(t) = \frac{1}{c-\alpha t}, \quad c = 1/N(0).$$

Widzimy więc, że populacja eksploduje w skończonym czasie T ($T = 1/(N(0)\alpha)$:

$$\lim_{t\to T^-} N(t) = +\infty.$$

19.4. **Rozpad promieniotwórczy** Prędkość rozpadu substancji promieniotwórczej jest proporcjonalna do ilości tej substancji. Jeżeli $N(t)$ oznacza ilość tej substancji w czasie t, to mamy następujące równanie

$$\frac{d\,N(t)}{dt} = -\alpha N(t).$$

Oznacza to, że $N(t)$ maleje wykładniczo

$$N(t) = N_0 e^{-\alpha t}.$$

Fakt, że na Ziemi wciąż pozostają znaczące ilości substancji radioaktywnych spowodowany jest tym, że obecne naturalnie substancje promieniotwórcze rozpadają cię bardzo powoli. Czas połowicznego rozpadu uranu 238 (czyli czas po jakim ilość substancji zmniejsza się o połowę) liczony jest w miliardach lat.

19.5. **Funkcje hiperboliczne**. Funkcje postaci $x \to a\cos x + b\sin x$ spełniają równanie różniczkowe $u''(x) + u(x) = 0$. Rozważmy teraz podobne równanie

$$u''(t) - u(t) = 0.$$

Zauważmy, że funkcje $t \to e^t$ i $t \to e^{-t}$ spełniają to równanie. Przez analogię z funkcjami trygonometrycznymi wprowadzamy następujące dwie nowe funkcje

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

które nazywamy odpowiednio hiperbolicznym kosinusem i hiperbolicznym sinusem. Mamy

$$\cosh 0 = 1, \quad \sinh 0 = 0,$$
$$\sinh(-t) = \sinh t, \quad \cosh(-t) = t,$$
$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Mamy również

(2)
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sinh t}{\frac{1}{2}e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\cosh t}{\frac{1}{2}e^t} = 1,$$

co pokazuje, że obie funkcje hiperboliczne zachowują się w $+\infty$ jak $\frac{1}{2}e^t$. Łatwo jest policzyć pochodne

$$\frac{d\cosh t}{dt} = \sinh t, \qquad \frac{d\sinh t}{dt} = \cos t.$$

Twierdzenie 19.6. *Niech*

(3)
$$f''(t) - f(t) = 0, \quad f(0) = a, \quad f'(0) = b.$$

Wtedy

$$f(t) = a\cosh t + b\sinh t.$$

Dowód. Sprawdzamy najpierw, że funkcja $t \to a\cosh t + b\sinh t$ spełnia (3). Następnie, niech f spełnia (3). Wprowadźmy funkcję pomocniczą $g(t)$

$$g(t) = f(t) - a\cosh t - b\sinh t.$$

Łatwo sprawdzić, że $g(t)$ spełnia

$$g''(t) = g(t), \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 0.$$

Niech $\varphi(t) = g(t) - g'(t)$. Wtedy $\varphi(0) = g(0) - g'(0) = 0$ oraz

$$\varphi'(t) = g'(t) - g''(t) = g'(t) - g(t) = -\varphi(t).$$

Widzimy więc, że $\varphi(t) = \varphi(0)e{-}t = 0$, skąd $g(t) = g'(t)$ oraz $g(0) = 0$. Jeszcze raz korzystając z 18.12. otrzymujemy $g(t) \equiv 0$, co kończy dowód. □

Powyższe twierdzenie ma natychmiastowe uogólnienie.

Twierdzenie 19.7. *Niech $\omega > 0$ oraz*

$$f''(t) - \omega^2 f(t) = 0.$$

Wtedy

$$f(t) = a\cosh\omega t + b\sinh\omega t.$$

Zauważmy, że $\cosh t > 0$, więc biorąc pod uwagę wzór na pochodną, otrzymujemy, że $\sinh t$ jest funkcją rosnącą. Dodatkowo, z (2) i nieparzystości $\sinh t$ wynika, że

$$\lim_{t\to-\infty}\sinh t = -\infty, \qquad \lim_{t\to\infty}\sinh t = +\infty.$$

Funkcja $\sinh t$ jest więc odwracalna, a odwrotna do niej, nazywana $\operatorname{arcsinh}$ określona jest na całej prostej $\mathbf{R}$. Obliczmy pochodną $\operatorname{arcsinh} t$, Niech $y = \sinh t$.

$$\frac{d\operatorname{arcsinh} y}{dy} = \frac{1}{\frac{d\sinh t}{dt}} = \frac{1}{\cosh t} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Biorąc pod uwagę, że $\operatorname{arcsinh} 0 = 0$, otrzymujemy kolejną interesującą całkę

$$\operatorname{arcsinh} t = \int_0^t \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Zauważmy teraz, że $\sinh t > 0$ dla $t > 0$, więc $\cosh t$ jest funkcją rosnącą na $[0, +\infty)$, i przyjmuje tam wartości z przedziału $[1, +\infty)$. Istnieje więc funkcja odwrotna, nazywana $\operatorname{arccosh} t$, określona na $[1, +\infty)$, o wartościach w $[0, +\infty)$. Obliczmy jej pochodną, niech $y = \cosh t$.

$$\frac{d\operatorname{arccosh} y}{dy} = \frac{1}{\frac{d\cosh t}{dt}} = \frac{1}{\sinh t} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 t - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Ponieważ $\operatorname{arccosh} 1 = 0$, więc

$$\operatorname{arccosh} y = \int_1^y \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}.$$

Funkcje $\operatorname{arcsinh}$ i $\operatorname{arccosh}$ można wyrazić przy pomocy funkcji wprowadzonych wcześniej

$$\operatorname{arcsinh} y = \log\left(y + \sqrt{1+y^2}\right),$$
$$\operatorname{arccosh} y = \log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$