Wykład z analizy

TYDZIEŃ 2.

LICZBY WYMIERNE II

2.1. Do postulatów **1.-16.** dodajemy jeszcze jeden postulat zwany postulatem Archimedesa.

17. Dla każdej liczby wymiernej a istnieje liczba całkowita k taka, że $a < k$.

2.2. Jeśli $a \leq \frac{1}{n}$ dla każdego naturalnego n, to $a \leq 0$.

Istotnie, jeśli $a > 0$, to $\frac{1}{a} > 0$. Z postulatu **17.** wynika, że istnieje liczba całkowita k taka, że $\frac{1}{a} < k$, skąd mamy $a > \frac{1}{k}$, czyli, że nie dla wszystkich n $a \leq \frac{1}{n}$.

2.3.Jeśli $A > 1$ i $a \leq A^{-n}$ dla wszystkich $n = 1, 2, 3, ..,$ to $a \leq 0$.

Istotnie, $A > 0$ pociąga, że dla $A = 1 + b$, gdzie $b = A - 1 > 0$. Stąd

$$A^n = (1+b)(1+b)....(1+b) = 1 + nb + \text{pozostałe dodatnie czynniki} > nb.$$

Wynika stąd, że $a \leq A^{-n} = \frac{1}{A^n}$ pociąga, że $a \leq \frac{1}{nb}$ czyli $ab \leq \frac{1}{n}$, skąd wobec 2.2. mamy $ab \leq 0$, a ponieważ $b > 0$ więc $a \leq 0$.

2.4. Dla $a \in \mathcal{Q}$ piszemy

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a & \text{jeśli } a \leq 0 \end{cases}$$

Mamy

$$|a| > 0 \text{ dla } a \neq 0, \quad |0| = 0$$

oraz

$$|a| = |-a|, \quad |ab| = |a||b| \quad |a^{-1}| = |a|^{-1} \quad |\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Dla $a \in \mathcal{Q}$ liczbę $|a|$ interpretujemy geometrycznie jako odległość na osi liczbowej punktu a od punktu 0. W szczególności,

$$|a| < \alpha \text{ znaczy, że } -\alpha < a < \alpha.$$

Podobnie $|a - b|$ interpretujemy jako odległość punktów a i b na osi liczbowej. Mówimy, że odległość między liczbami a i b "jest mała", jeśli liczba $|a-b|$ jest mała. Liczba $-\frac{11}{10}$ jest bliżej liczby -1 niż liczba $-\frac{1}{2}$.

2.5. Ta interpretacja geometryczna uzasadnia **nierówność trójkąta**:

(*) $$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Prawdziwość nierówności trójkąta sprawdzamy przez rozważenie przypadków:

(1) $a \geq 0$ i $b \geq 0$. Wtedy $a + b \geq 0$ oraz $a = |a|, \quad b = |b|, \quad a + b = |a + b|$ i (*) zachodzi.

(2) $a \leq 0$ i $b \leq 0$. Wtedy $a + b \leq 0$ oraz $a = -|a|, \quad b = -|b|, \quad a + b = -|a + b|$ i (*) zachodzi.

(3) $a \geq 0$ i $b \leq 0$. Wtedy $a = |a|, \quad b = -|b|, \quad a + b = |a| - |b|$ czyli

$$|a + b| = \begin{cases} |a| - |b| & \text{gdy } |a| \geq |b| \\ |b| - |a| & \text{gdy } |a| \leq |b| \end{cases}.$$

Wtedy odpowiednio

$$|a + b| = \begin{cases} |a| - |b| \leq |a| + |b| & \text{gdy } |a| \geq |b| \\ |b| - |a| \leq |a| + |b| & \text{gdy } |a| \leq |b| \end{cases}.$$

(4) Przypadek $a \leq 0$ i $b \geq 0$ jest identyczny z poprzednim.

2.6. Z nierówności trójkąta otrzymujemy natychmiast

$$|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|, \quad ||a|-|b|| \leq |a-b|.$$

Istotnie, $|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b|$ więc , przenosząc na drugą stronę $|b|$ mamy $|a|-|b| \leq |a-b|$. Zamieniając rolami a i b otrzymujemy $-(|a|-|b|) = |b|-|a| \leq |b-a| = |a-b|$.

2.7. Interpretacja geometryczna następującego faktu jest oczywista.

$$a \leq x \leq b \quad \text{i} \quad a \leq y \leq b \Longrightarrow |x-y| \leq b-a.$$

Istotnie, odległość dwóch punktów należących do odcinka $[a,b]$ jest nie większy niż długość tego odcinka. Dowód analityczny jest następujący: możemy przyjąć, że $x \leq y$. Wtedy $0 \leq y-x \leq b-x \leq b-a$, bo $-x \leq -a$.

2.8. Liczbę wymierna x, która ma postać

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + ... + \frac{\alpha_3}{10^3} + \frac{\alpha_n}{10^n}$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ są liczbami $0, ..., 9$ nazywa się ułamkiem dziesiętnym. Zapisujemy ją $x = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n..$ (Zauważmy, że na końcu ułamka dziesiętnego piszemy kropkę!) Dodatnia liczba wymierna może być zapisana w postaci

$$a + x = a,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n.,$$

gdzie a jest nieujemną liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy gdy jest ona postaci $\frac{p}{q}$, p i q nie mają wspólnych dzielników oraz q jest iloczynem potęgi liczby 2 i potęgi liczby 5.

2.9. **Nieskończonym rozwinięciem dziesiętnym** dodatniej liczby wymiernej nazywamy zapis

$$a,\alpha_1\alpha_2\alpha_3...,$$

gdzie a jest nieujemną liczbą całkowitą, a $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$ są liczbami $0, 1, 2, ..., 9$. Np. liczbę $\frac{1}{3}$ zapisujemy jako $0,33333.....$

2.10. *Każdą dodatnią liczbę wymierną możemy zapisać w postaci nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego.* Istotnie, niech x będzie dodatnią liczbą wymierną i niech a będzie największą liczbą całkowitą *mniejszą* od x. Wtedy

$$a < x \leq a+1.$$

Piszemy liczbę a po lewej stronie przecinka.

Jeśli np. $x = \frac{13}{9}$, wtedy

$$a = 1 \quad \text{i} \quad 1 < \frac{13}{9} \leq 2.$$

Z pośród dziesięciu liczb:

$$a = a + \frac{0}{10}, \quad a + \frac{1}{10}, \quad a + \frac{2}{10}, \quad ..., \quad a + \frac{9}{10}$$

wybieramy największą mniejszą od x. Niech to będzie $a + \frac{\alpha_1}{10}$. Wtedy

$$a + \frac{\alpha_1}{10} < x \leq a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{1}{10}.$$

Możemy to zapisać

$$a,\alpha_1 < x \leq a,\alpha_1 + 10^{-1}.$$

W przypadku liczby $\frac{13}{9}$ $\alpha_1 = 4$.

W podobny sposób znajdujemy liczbę α_2: jest to największa z pośród liczb $0, 1, 2, ..., 9$ taka, że

$$a, \alpha_1 a_2 . < x \leq a, \alpha_1 \alpha_2 . + 10^{-2}$$

W przypadku liczby $\frac{13}{9}$ $\alpha_2 = 4$ tzn.

$$1, 4. < \frac{13}{9} \leq 1, 4. + 10^{-2}.$$

Kontynuując ten proces znajdujemy liczby $a, \alpha_1, ..., \alpha_m$ takie, że

$$a, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_m . < x \leq a, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_m . + 10^{-m} \quad \text{dla} \quad m = 0, 1, 2, 3, ...$$

Nie może zaistnieć przypadek, że wszystkie liczby α począwszy od pewnego miejsca , np. począwszy od liczby a_k będą zerami. Mielibyśmy wtedy bowiem, że

$$a, \alpha_1 .... \alpha_k . < x \leq a, \alpha_1 ... \alpha_k . + 10^{-m} \quad \text{dla każdego} \quad m = k+1, k+2, ...$$

Wynikałoby stąd, że

$$0 < x - a, \alpha_1 ..., \alpha_k . \leq 10^{-m}$$

dla wszystkich $m = 1, 2, ...$, co jak wiemy znaczy,że $0 < x - a, \alpha_1 ..., \alpha_k \leq 0$, co jest niemożliwe.

Jeśli dla dwóch liczb wymiernych x, y is rozwinięcia dziesiętne są równe, to $x = y$. Istotnie, jeśli rozwinięcia dziesiętne liczb x i y są te same, to

$$a, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_m . < x \leq a, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_m . + 10^{-m}$$
$$a, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_m . < y \leq a, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_m . + 10^{-m}$$

skąd wynika, że

$$|x - y| \leq 10^{-m} \quad \text{dla każdego} \quad m = 0, 1, 2, ...$$

co pociąga, że $|x - y| = 0$.

2.11. Dla $x \in \mathcal{Q}^+$ piszemy

$$x = a, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 .... \text{ oraz } -x = -a, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 .....$$

to znaczy, że

$$-a - \frac{\alpha_1}{10} - \frac{\alpha_2}{10^2} - ... - \frac{\alpha_m}{10^m} - 10^{-m} \leq -x < -a - \frac{\alpha_1}{10} - \frac{\alpha_2}{10^2} - ... - \frac{\alpha_m}{10^m}$$

dla każdego $m = 0, 1, 2, ...$

2.12. Jeśli liczba x ma *skończone* rozwinięcie dziesiętne, tzn.

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + ... + \frac{\alpha_3}{10^3} + \frac{\alpha_n}{10^n} = a, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n .,$$

to procedura opisana powyżej daje nieskończone rozwinięcie dziesiętne x postaci

$$a, \alpha_1 \alpha_2 ... (\alpha_n - 1) 9999 ....$$

2.13. Można udowodnić, ale nie będziemy z tego korzystać, że rozwinięcie dziesiętne dodatniej liczby *wymiernej* jest postaci

$$a, \alpha_1 .... \alpha_k \alpha_{k+1} .... \alpha_{k+s} \alpha_{k+1} .... \alpha_{k+s} \alpha_{k+1} .... \alpha_{k+s} ....$$

tzn. od pewnego miejsca blok cyfr $\alpha_{k+1} .... \alpha_{k+s}$ powtarza się nieskończenie wiele razy. Np.

$$\frac{203}{165} = 1, 23303030....$$

Piszemy wtedy

$$\frac{203}{165} = 1, 23\overline{30}.$$