Wykład z analizy

Tydzień 20.

Metody całkowania

20.1. Ułamkiem prostym nazywamy funkcję wymierną następującego typu

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)^n},$$

gdzie albo (a) $g(x)$ jest funkcją stałą a $h(x)$ liniową, albo (b) $g(x)$ jest funkcją stałą albo liniową a $h(x)$ jest funkcją kwadratową, nie posiadającą pierwiastków rzeczywistych. Na przykład, następujące funkcje są ułamkami prostymi

$$\frac{2}{x-3}, \qquad \frac{6}{(x+100)^{28}}, \qquad \frac{3x+7}{2x^2+2x+10}, \qquad \frac{4x-3}{(x^2+2x+10)^3},$$

a następująca funkcja nie jest

$$\frac{1}{(x^2-3x+2)^2}$$

(gdyż mianownik ma pierwiastki, 1 i 2).

Zainteresowanie ułamkami prostymi bierze się z dwóch faktów: (1) ułamki proste można scałkować przy pomocy funkcji które mamy do dyspozycji (to znaczy całkę zapisać konkretnym wzorem), i (2) każdą funkcję wymierną można rozłożyć na sumę ułamków prostych i wielomianu.

20.2. Całkowanie ułamków prostych rodzaju (a). W tym wypadku całkowanie nie przedstawia żadnych trudności. Stosujemy podstawienie $ax + b = t$ a więc $adx = dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\alpha\, dx}{(ax+b)^n} &= \int \frac{\alpha(1/a)\, dt}{t^n} = \frac{\alpha}{a}\int t^{-n}\, dt\\ &= \begin{cases} \frac{\alpha}{a(1-n)(ax+b)^{n-1}} + C; & \text{jeśli } n \neq 1,\\ \frac{\alpha}{a}\log|ax+b| + C; & \text{jeśli } n = 1.\end{cases}\end{aligned}$$

Jak widać funkcja pierwotna tego typu ułamka prostego jest albo funkcją wymierną albo logarytmiczną.

20.3. Całkowanie ułamków prostych rodzaju (b), w przypadku gdy licznik jest stałą. Znajdziemy wzór na całkę postaci

$$\int \frac{\alpha\, dx}{(ax^2+bx+c)^n}, \qquad \text{gdzie } b^2 - 4ac < 0,$$

(gdyż z założenia mianownik nie ma pierwiastków rzeczywistych). Przy pomocy prostego podstawienia liniowego sprowadzimy tą całkę do postaci

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}. \tag{1}$$

W tym celu przekształcamy mianownik

$$\begin{aligned}(ax^2+bx+c)^n &= a^n\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)^n\\ &= a^n\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)^n\\ &= a^n\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)^n.\end{aligned}$$

Podstawmy

$$q = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \qquad \text{i} \qquad \frac{x+(b/2a)}{q} = t.$$

Otrzymujemy
$$(ax^2+bx+c)^n = a^n q^{2n}(t^2+1)^n, \qquad dx = q\,dt,$$
oraz
$$\int \frac{\alpha\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{\alpha}{a^n q^{2n-1}} \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}.$$
Przykład: Obliczymy
$$\int_0^3 \frac{dx}{4x^2+6x+9}.$$
zgodnie z powyższym schematem, podstawiamy
$$t = \frac{4(x+3/4)}{\sqrt{27}},$$
i otrzymujemy
$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{dx}{4x^2+6x+9} &= \frac{4}{27}\frac{\sqrt{27}}{4}\int_{1/\sqrt{3}}^{5/\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{27}}\left\{\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.\end{aligned}$$

20.4. Wzór rekurencyjny. Teraz obliczymy całkę (1). Jeśli $n=1$ to całka jest równa, z dokładnością do stałej, $\operatorname{arctg} x$. Jeżeli $n>1$ to napiszemy $n=m+1$ i wyprowadzimy **wzór rekurencyjny**, czyli obliczymy całkę (1) z $n=m+1$ przy pomocy tego samego typu całki z $n=m$. Wzór rekurencyjny otrzymujemy całkując przez części, i zauważając następujące dwa fakty
$$\frac{d\,\frac{1}{(x^2+1)^m}}{dx} = -\frac{2mx}{(x^2+1)^{m+1}},$$
oraz
$$\frac{1}{(x^2+1)^m} = \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{m+1}} = \frac{x^2}{(x^2+1)^{m+1}} + \frac{1}{(x^2+1)^{m+1}}.$$
Biorąc pod uwagę oba te fakty otrzymujemy
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{m+1}} &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^m} - \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^{m+1}}\\ &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^m} + \frac{1}{2m}\frac{x}{(x^2+1)^m} - \frac{1}{2m}\int \frac{dx}{(x^2+1)^m}\\ &= \frac{1}{2m}\frac{x}{(x^2+1)^m} + \left(1-\frac{1}{2m}\right)\int \frac{dx}{(x^2+1)^m}.\end{aligned}$$

Powyższy wzór to szukany wzór rekurencyjny. Natychmiast otrzymujemy jego wersję dla całek oznaczonych
$$\int_a^b \frac{dx}{(x^2+1)^{m+1}} = \frac{1}{2m}\frac{x}{(x^2+1)^m}\bigg|_a^b + \left(1-\frac{1}{2m}\right)\int_a^b \frac{dx}{(x^2+1)^m}.$$
Zauważmy, że powyższy wzór jest prawdziwy także dla m nie będącej liczbą całkowitą, jeżeli tylko $m \neq 0$.

Używając wzoru rekurencyjnego możemy sprowadzić, w $n-1$ krokach, całkę (1) do całki
$$\int \frac{dx}{x^2+1}.$$

Przykład: Obliczymy
$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x^2+2x+2)^3}.$$

Podstawiając $t = x + 1$ całkę sprowadzamy do

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^3},$$

a następnie używamy wzoru rekurencyjnego dwukrotnie.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^3} &= \frac{1}{4}\frac{t}{(t^2+1)^2}\bigg|_0^1 + \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\frac{t}{(t^2+1)^2}\bigg|_0^1 + \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}\bigg|_0^1 + \frac{3}{4}\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 0\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \frac{3}{8}\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}.\end{aligned}$$

20.5. Całkowanie ułamków prostych rodzaju (b) gdy licznik nie jest stałą. Obliczymy całkę postaci

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{(ax^2+bx+c)^n}dx, \qquad \text{gdzie } \alpha \neq 0,\ b^2 - 4ac < 0.$$

Dokonujemy przekształcenia

$$\begin{aligned}\int \frac{\alpha x + \beta}{(ax^2+bx+c)^n}dx &= \int \frac{\frac{\alpha}{2a}(2ax+b) + \beta - \frac{\alpha b}{2a}}{(ax^2+bx+c)^n}dx \\ &= \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \left(\beta - \frac{\alpha b}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}.\end{aligned}$$

Drugą całkę obliczyliśmy w poprzednim punkcie. Pierwszą obliczamy przez podstawienie $t = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n} &= \int \frac{dt}{t^n} \\ &= \begin{cases} \log|ax^2+bx+c| + C; & \text{jeśli } n = 1, \\ \frac{1}{(1-n)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + C; & \text{jeśli } n \neq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

W ten sposób udowodniliśmy następujące twierdzenie

Twierdzenie 20.6. *Funkcja pierwotna dowolnego ułamka prostego jest sumą funkcji wymiernej, logarytmicznej i arkusa tangensa.*

Następujące twierdzenie przytaczamy bez dowodu. Dowód opiera się na fakcie, że każdy wielomian można rozłożyć na iloczyn czynników stopnia nie większego niż dwa, czyli liniowych i kwadratowych. Ten fakt z kolei jest konsekwencją tak zwanego zasadniczego twierdzenia algebry, które mówi, że każdy wielomian rozkłada się na iloczyn czynników liniowych, jeżeli dopuścić jako współczynniki liczby zespolone.

Twierdzenie 20.7. *Każdą funkcję wymierną można rozłożyć na sumę wielomianu i ułamków prostych.*

Wniosek. *Całka nieoznaczona funkcji wymiernej jest sumą funkcji wymiernych, logarytmicznych i arkusów tangensów.*

20.8. Rozkład na ułamki proste. Niech $x \mapsto f(x)$ będzie funkcją wymierną. Wtedy $f(x) = \varphi(x)/\psi(x)$, gdzie φ i ψ są wielomianami. Załóżmy, że f nie jest wielomianem, gdyż wielomiany całkuje się prosto. W takim razie załóżmy, że stopień wielomianu ψ jest większy niż 0, i że ten wielomian nie dzieli φ. Jeżeli stopień φ nie jest mniejszy niż stopień ψ to dzielimy φ przez ψ

$$\varphi(x) = q(x)\psi(x) + r(x),$$

gdzie q i r są wielomianami i stopień r jest mniejszy niż stopień ψ. Wtedy

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{\psi(x)}.$$

Żeby scałkować f wystarczy scałkować r/ψ, gdyż całkowanie q nie przedstawia żadnego problemu. Tak więc, możemy z góry założyć, że stopień φ jest mniejszy niż stopień ψ – inne przypadki można od razu do tego przypadku sprowadzić. Załóżmy też, że oba wielomiany φ i ψ nie mają wspólnych czynników (w przeciwnym przypadku podzielmy je przez wszystkie wspólne dzielniki).

Pierwszym, i najtrudniejszym krokiem w rozkładzie f na ułamki proste jest rozkład mianownika ψ na iloczyn czynników liniowych i kwadratowych nierozkładalnych. Innymi słowy, musimy zapisać

$$\psi(x) = A(x-\alpha_1)^{\nu_1}\cdots(x-\alpha_k)^{\nu_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{\mu_1}\cdots(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{\mu_l}, \tag{2}$$

gdzie liczby μ i ν są liczbami naturalnymi, wszystkie α są od siebie różne, wszystkie czynniki kwadratowe są różne i nierozkładalne (nie mają pierwiastków). Wiadomo, że każdy wielomian ψ można tak rozłożyć, wynika to z wspomnianego wyżej zasadniczego twierdzenia algebry. Niestety, nie ma żadnej ogólnej metody, która pozwalałaby taki rozkład znaleźć.

20.9. Nieoznaczone współczynniki. Niech mianownik będzie już dany przez (2). Zawsze możemy założyć, że $A = 1$ (odpowiada to wyciągnięciu stałej $1/A$ przed znak całki. Następnie bierzemy pod uwagę jako możliwe składniki sumy ułamki proste mające mianowniki będące czynnikami (2), z potęgami nie większymi niż te występujące w (2). Liczniki zostawiamy dowolne. To są właśnie współczynniki nieoznaczone. Oznaczamy je wstawiając do konkretnego wzoru i sprowadzając do wspólnego mianownika. Tą metodę najlepiej poznać na przykładach. Rozważmy funkcję wymierną

$$\frac{x^4+x^2+2x+1}{x^4(x+1)^2}.$$

W rozkładzie na ułamki proste mogą wystąpić ułamki o mianownikach x^4, x^3, x^2, x, $(x+1)^2$ oraz $(x+1)$. Ponieważ wszystkie mianowniki są liniowe, więc liczniki muszą być stałe. Mamy więc do ustalenia 6 stałych, A, B, C, D, E i F.

$$\frac{x^4+x^2+2x+1}{x^4(x+1)^2} = \frac{A}{x^4} + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{F}{(x+1)}. \tag{3}$$

Dodając 6 ułamków po prawej stronie dostajemy

$$\frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1)^2 + Cx^2(x+1)^2 + Dx^3(x+1)^2 + Ex^4 + Fx^x(x+1)}{x^4(x+1)^2}.$$

Porządkując licznik według potęg x otrzymujemy

$$(D+F)x^5 + (C+2D+E)x^4 + (B+2C+D)x^3 + (A+2B+C)x^2 + (2A+B+F)x + A.$$

Porównując liczniki w (3) otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{aligned} D+F &= 0\\ C+2D+E &= 1\\ B+2C+D &= 0\\ A+2B+C &= 1\\ 2A+B+F &= 2\\ A &= 1. \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy $A = 1$, $B = C = D = 0$, $E = 1$, $F = 0$. Tak więc

$$\frac{x^4+x^2+2x+1}{x^4(x+1)^2} = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

20.10. Niech $R(u)$ oznacza funkcję wymierną zmiennej u, a $R(u, v)$ funkcję wymierną dwóch zmiennych u i v. Wymienimy teraz metody znajdowania kilku rodzajów całek, które odpowiednim podstawieniem można sprowadzić do całek funkcji wymiernych.

20.11. Całkę postaci $\int R(e^x)\, dx$ można sprowadzić do całki wymiernej podstawiając

$$y = e^x.$$

20.12. Całkę $\int R(x, \sqrt[q]{\alpha x + \beta})$, gdzie $q > 1$ jest liczbą całkowitą, $\alpha \neq 0$ sprowadzamy do całki wymiernej podstawiając

$$y = \sqrt[q]{\alpha x + \beta}.$$

20.13. W całce $\int R(\cos x, \sin x)\, dx$ stosujemy podstawienie

$$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

20.14. W całce $\int R(\cosh x, \sinh x)\, dx$ stosujemy podstawienie

$$y = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}.$$