Wykład z analizy

Tydzień 21.

Wzór Taylora

Przypomnijmy następujące twierdzenie z tygodnia 10.

Twierdzenie o wartości średniej 10.11. *. Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[a,b]$ i różniczkowalną w każdym punkcie wewnętrznym odcinka (czyli na (a,b)). Wtedy istnieje punkt $\xi \in (a,b)$ taki, że*

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = f'(\xi).$$

Następujące twierdzenie jest łatwym, ale bardzo użytecznym uogólnieniem twierdzenia o wartości średniej.

Uogólnione Twierdzenie o wartości średniej 21.1. *Niech F i G będą dwoma funkcjami ciągłymi na $[a,b]$ takimi, że ich pochodne F' i G' istnieją w każdym punkcie przedziału otwartego (a,b). Wtedy istnieje punkt $\xi \in (a,b)$ taki, że*

(1)
$$(F(b)-F(a))\,G'(\xi) = (G(b)-G(a))\,F'(\xi).$$

Jeśli $G'(x) \neq 0$ w każdym punkcie (a,b), to (1) można zapisać jako

(2)
$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F(\xi)}{G(\xi)}.$$

Dowód. Twierdzenie to udowodnimy w oparciu o Twierdzenie Rolle'a z tygodnia 10, podobnie jak udowodniliśmy zwykłe twierdzenie o wartości średniej. Zdefiniujmy funkcję

$$f(x) = (F(b)-F(a))\,(G(x)-G(a)) - (G(b)-G(a))\,(F(x)-F(a))\,.$$

Funkcja f jest ciągła, różniczkowalna, oraz, jak łatwo sprawdzić, $f(a)=f(b)=0$. Z twierdzenia Rolle'a istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że $f'(\xi)=0$. To jest dokładnie (1). $\square$

Zauważmy następujący natychmiastowy wniosek

Wniosek 21.2. *Jeśli spełnione są założenia twierdzenia 21.1 oraz $F(a)=G(a)=0$, to istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że*

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

21.3. Uogólnione twierdzenie o wartości średniej daje możliwość oszacowania błędu przy przybliżeniu funkcji f funkcją liniową

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną wewnątrz przedziału $[a,b]$. Dla ustalonego punktu $x_0 \in (a,b)$ przybliżamy wykres funkcji f w otoczeniu punktu $(x_0, f(x_0))$ przez prostą styczną do wykresu funkcji f w tym punkcie. Innymi słowy piszemy

(3)
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R(x).$$

$R(x)$ reprezentuje różnicę pomiędzy wartościami funkcji f a jej liniowego przybliżenia $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, innymi słowy błąd tego przybliżenia. Z równości (3) dostajemy

$$\frac{R(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0).$$

Wynika stąd,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0,$$

czyli reszta $|R(x)|$ jest mała w porównaniu do $|x - x_0|$. Korzystając z wniosku 21.2. możemy uzyskać oszacowanie tej reszty. Istotnie, mamy $R(x_0) = 0$, a ponieważ

$$f'(x) = f'(x_0) + R'(x),$$

więc $R'(x_0) = 0$. Różniczkując powyższe jeszcze raz dostajemy

$$f''(x) = R''(x).$$

Zastosujmy teraz wniosek 21.2. do funkcji $F(t) = R(t)$ i $G(t) = (t - x_0)^2$, $a = x_0$, $b = x$. Istnieje więc liczba τ pomiędzy x_0 i x taka, że

$$\frac{R(x)}{(x - x_0)^2} = \frac{R'(\tau)}{2(\tau - x_0)}. \tag{4}$$

Wniosek 21.2. stosujemy jeszcze raz, tym razem do funkcji $F(t) = R(t)$, $G(t) - 2(t - x_0)$, $a = x_0$, $b = \tau$, i otrzymujemy liczbę ξ pomiędzy x_0 a τ taką, że

$$\frac{R'(\tau)}{2(\tau - x_0)} = \frac{R''(\xi)}{2} = \frac{f''(\xi)}{2}. \tag{5}$$

szczególności, jeżeli $|f''(x)| \leqslant M$ pomiędzy x_0 a x, to łącząc (4) z (5) otrzymujemy

$$|R(x)| \le \frac{M(x - x_0)^2}{2}.$$

21.5. Przykład. Rozważmy funkcję $f(x) = \sqrt{x}$. Aby obliczyć wartość $f(x)$ dla x bliskich 1 piszemy $x = 1 + h$. Mamy

$$\sqrt{1+h} = 1 + f'(1)h + R(h) = 1 + \frac{h}{2} + R(h),$$

oraz

$$f''(x) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}} = -\frac{1}{4(1+h)\sqrt{1+h}}.$$

Dla oszacowania błędu chcemy pokazać, że $f''(x)$ jest ograniczona w jakimś otoczeniu 1. Zauważamy, że funkcja $h \to |f''(1 + h)|$ jest funkcją malejącą. Tak więc kładąc, na przykład, $h = -\frac{3}{4}$ otrzymujemy $|f''(\frac{1}{4})| = 2$ skąd

$$|\sqrt{1+h} - \left(1 + \frac{h}{2}\right)| \leqslant h^2, \quad |h| \leqslant \frac{3}{4}.$$

Na przykład, $\sqrt{1,03} = 1.015$ i $\sqrt{0,97} = 0,985$ z błędem mniejszym niż $0,03^2 = 0,0009$. Innym zastosowaniem uogólnionego twierdzenia o wartości średniej jest tak zwana reguła de l'Hospitala, bardzo przydatna przy liczeniu granic funkcji, którą omówimy w przyszłości.

21.6. Udowodniliśmy powyżej, że jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna, to

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2, \tag{6}$$

gdzie ξ jest odpowiednio dobraną liczbą pomiędzy x_0 i x. Jeśli funkcja $f(x)$ jest *trzykrotnie* różniczkowalna, to w szczególności $f''(x)$ jest ciągła, i dla x bliskich x_0 mamy $f''(\xi) \simeq f''(x_0)$. Sugeruje to, że funkcję $f(x)$ można jeszcze dokładniej przybliżyć w otoczeniu punktu x_0 przez funkcję kwadratową

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Zauważmy, że parabola $(x, P(x))$ jest styczna do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$, i dodatkowo $f''(x_0) = P''(x_0)$. Zbadamy jak dobrze funkcja kwadratowa $P(x)$ przybliża $f(x)$ w pobliżu punktu x_0. Piszemy

$$R(t) = f(t) - P(t),$$

i zauważamy, że

$$R(x_0) = R'(x_0) = R''(x_0) = 0, \quad \text{oraz} \quad R'''(x) = f'''(x).$$

Stąd, korzystając kilkakrotnie z wniosku 21.2. otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{(x-x_0)^3} &= \frac{R'(t_1)}{3(t_1-x_0)^2} && \text{dla pewnego } t_1 \text{ pomiędzy } x_0 \text{ i } x, \\ \frac{R'(t_1)}{3(t_1-x_0)^2} &= \frac{R'(t_2)}{3\cdot 2(t_2-x_0)} && \text{dla pewnego } t_2 \text{ pomiędzy } x_0 \text{ i } t_1, \\ \frac{R'(t_2)}{3\cdot 2(t_2-x_0)} &= \frac{R'''(\xi)}{3\cdot 2} && \text{dla pewnego } \xi \text{ pomiędzy } x_0 \text{ i } t_2. \end{aligned}$$

Podsumowując, otrzymujemy

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^3} = \frac{f'''(\xi)}{3\cdot 2} \quad \text{dla pewnego } \xi \text{ pomiędzy } x_0 \text{ i } x.$$

Jeśli więc $|f'''(t)| < M$ dla wszystkich t pomiędzy x_0 i x, to

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{1\cdot 2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + R(x),$$

przy czym

$$|R(x)| \leqslant \frac{M|x-x_0|^3}{6}.$$

21.7. Przykład. Niech $f(x) = \sqrt{x}$. Obliczamy

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = \frac{1}{2}, \quad f''(1) = -\frac{1}{4}, \quad |f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}.$$

Jak łatwo się przekonać, $|f'''(x)| < 12$ dla $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5}{4}$. Stąd

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + R(h),$$

gdzie

$$|R(h)| \leqslant 2h^3 \quad \text{dla} \quad |h| < \frac{3}{4}.$$

Na przykład, $\sqrt{1,2} = 1,1 - \frac{1}{8}(0,04) = 1,095$ z błędem nie przekraczającym $2(0,2)^3 = 0,016$.

21.8. Powyższe rozważania stanowią szczególne przypadki następującego problemu. Mając funkcję $f(x)$, różniczkowalną n-krotnie, i dla której znamy wartości pochodnych w punkcie x_0, $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ jak obliczyć najdokładniej wartości $f(x)$ w pobliżu x_0. Problem ten może się wydawać na pierwszy rzut oka nieco sztuczny, ale jest blisko związany z najbardziej interesującymi zagadnieniami analizy. Rozwiązanie tego problemu nastąpi w dwóch krokach. W pierwszym skonstruujemy wielomian $P(x)$ stopnia n, dla którego jego wartość, i wartości wszystkich jego pochodnych, do stopnia n włącznie, w punkcie x_0, będą takie same jak wartości funkcji $f(x)$ i jej pochodnych w tym punkcie. Taki wielomian może być tylko jeden, i nazywa się wielomianem Taylora funkcji $f(x)$ w punkcie x_0. W drugim kroku zajmiemy się oszacowaniem różnicy

$$f(x) - P(x).$$

Twierdzenie 21.9. *Niech będzie danych $n+2$ liczb $x_0, \alpha_0, \dots, \alpha_n$. Istnieje dokładnie jeden wielomian $P(x)$ stopnia nie większego niż n dla którego*

$$P(x_0) = \alpha_0, \quad P'(x_0) = \alpha_1, \quad \cdots, \quad P^{(n)}(x_0) = \alpha_n. \tag{7}$$

Wielomian ten to

$$P(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1}(x-x_0) + \frac{\alpha_2}{1\cdot 2}(x-x_0)^2 + \frac{\alpha_3}{1\cdot 2\cdot 3}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{\alpha_n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}(x-x_0)^n. \tag{8}$$

Dowód. Niech $P(x)$ będzie dany wzorem (8). Jest to więc wielomian stopnia nie większego niż n (może być stopnia mniejszego, jeżeli $\alpha_n = 0$). Następnie zauważmy, że dla wszystkich nieujemnych liczb całkowitych j, k zachodzą następujące równości.

$$\frac{d^k(x-x_0)^j}{dx^k} = j(j-1)(j-2)\cdots(j-k+1)(x-x_0)^{j-k}, \quad \text{dla } k < j,$$
$$\frac{d^j(x-x_0)^j}{dx^j} = 1\cdot 2\cdot 3\cdots j, \qquad \frac{d^k(x-x_0)^j}{dx^k} = 0, \quad \text{dla } k > j.$$

Powyższe wzory są oczywiste. Formalny dowód można przeprowadzić indukcyjnie. Pozostawiamy to czytelnikowi, jako ćwiczenie. Używając powyższych zależności obliczamy k-tą pochodną $P(x)$ $(k < n)$.

$$P^{(k)}(x) = \alpha_k + \alpha_{k+1}(x-x_0) + \cdots + \frac{\alpha_n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-k)}(x-x_0)^{n-k},$$

oraz n-tą pochodną

$$P^{(n)}(x) = \alpha_n.$$

Podstawiając $x = x_0$ otrzymujemy (7). Pozostaje pokazać, że $P(x)$ jest jedynym wielomianem spełniającym (7). Załóżmy że $\tilde{P}(x)$ też spełnia (7) i jest stopnia nie większego od n. Wtedy $Q(x) = P(x) - \tilde{P}(x)$ jest wielomianem stopnia nie większego od n, takim, że wszystkie jego pochodne stopni od 0 do n są zerami. Łatwo pokazać, indukcyjnie, że taki wielomian musi być wielomianem zerowym. □

21.10. Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i niech $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ istnieją w tym przedziale. **n-tym wielomianem Taylora** funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 \in (a, b)$ nazywamy wielomian $P(x)$ stopnia nie większego niż n spełniający

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f'(x_0), \quad P''(x_0) = f''(x_0), \quad \cdots, \quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Jak wynika z Twierdzenia 21.9. wielomian taki może być tylko jeden, i dany jest wzorem

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{1\cdot 2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Warto zwrócić uwagę na następujące własności. $n+1$-szy wielomian Taylora w punkcie x_0 otrzymujemy przez dodanie do n-tego wielomianu w tym samym punkcie tylko jednego składnika

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Następnie, jeżeli $P(x)$ jest n-tym wielomianem Taylora funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, to $P'(x)$ jest $n-1$-tym wielomianem Taylora funkcji $f'(x)$ w tym samym punkcie. Podobnie,

$$\int_{x_0}^{x} P(t)\, dt$$

jest $n+1$-szym wielomianem funkcji

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt,$$

w punkcie x_0. Zauważmy jeszcze, że jeżeli $f(x)$ jest wielomianem stopnia n, to funkcja $f(x)$ sama jest swoim n-tym wielomianem Taylora w każdym punkcie x_0.

21.11. Przykłady. (a) Czwartym wielomianem Taylora funkcji $f(x) = \sqrt{1+x}$ w punkcie $x_0 = 0$ jest

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{8}x^3 - \frac{1}{4!}\cdot\frac{15}{16}x^4 \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128}. \end{aligned}$$

(b) Wyliczenie czwartego wielomianu Taylora $P(x)$ funkcji $(1+x)^{3/2}$ w punkcie 0 można otrzymać „na skróty” zauważając, że

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{1+t}\, dt.$$

W przykładzie (a) znaleźliśmy czwarty wielomian Taylora funkcji podcałkowej, a więc

$$P(x) = 1 + \frac{3}{2}\int_0^x \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \frac{5t^4}{128}\right) dt = 1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{3x^3}{48} + \frac{3x^4}{128}.$$

Teraz zajmiemy się oszacowaniem „reszty” $R(x)$.

Twierdzenie (wzór Taylora) 21.12. *Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$ mającą $n+1$ pochodnych w (a,b). Niech $x_0, x \in (a,b)$ i niech*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x).$$

Wtedy istnieje ξ pomiędzy x i x_0 taki, że

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

(ξ zależy od x). Wynika stąd, że jeżeli $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$ dla wszystkich $t \in (a,b)$ to

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dowód. Mamy

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P(x),$$

gdzie $P(x)$ jest n-tym wielomianem Taylora funkcji $f(x)$ w punkcie x_0. Pisząc w skrócie $R_{n+1}(x) = R(x)$, mamy

$$R(x_0) = R'(x_0) = \cdots = R^{(n)}(x_0) = 0.$$

Teraz, tak jak w 21.6., piszemy

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R'(t_1)}{(n+1)(t_1-x_0)^n} \quad \text{dla pewnego } t_1 \text{ pomiędzy } x_0 \text{ i } x,$$

$$\frac{R'(t_1)}{(n+1)(t_1-x_0)^n} = \frac{R''(t_2)}{(n+1)n(t_2-x_0)^{n-1}} \quad \text{dla pewnego } t_2 \text{ pomiędzy } x_0 \text{ i } t_1,$$

$$\frac{R''(t_2)}{(n+1)n(t_2-x_0)^{n-1}} = \frac{R'''(t_3)}{(n+1)n(n-1)(t_3-x_0)^{n-2}} \quad \text{dla pewnego } t_3 \text{ pomiędzy } x_0 \text{ i } t_2,$$

....

$$\frac{R^{(n)}(t_n)}{(n+1)n(n-1)\cdots 2(t_n-x_0)} = \frac{R^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \text{dla pewnego } \xi \text{ pomiędzy } x_0 \text{ i } x,$$

skąd, ponieważ $P^{(n+1)}(x) = 0$, czyli $f^{(n+1)}(x) = R^{(n+1)}(x)$, mamy

$$\frac{R^{(n+1)}(\xi)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \text{dla pewnego } \xi \text{ pomiędzy } x_0 \text{ i } x. \quad \square$$

21.13. Przykład. Niech $f(x) = e^x$. Ponieważ $f^{(n)}(x) = f(x)$, więc n-ty wielomian Taylora $f(x)$ w punkcie 0 ma postać

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Ze wzoru Taylora mamy

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!},$$

skąd dla $x = 1$ mamy, ponieważ $0 < \xi < 1$,

$$1 + x + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \frac{e}{(n+1)!} < e < 1 + x + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e}{(n+1)!},$$

czyli

$$\left(1 + x + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\left(1 + \frac{1}{(n+1)!}\right)^{-1} < e < \left(1 + x + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right)^{-1}$$

Dla $n = 5$ otrzymujemy $2,712 < e < 2.7197$.