Wykład z analizy

Tydzień 22.

Zastosowania wzoru Taylora

22.1. Przypomnijmy wzór Taylora:

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Założyliśmy przy tym, że funkcja f jest określona w przedziale (a,b) i ma $n+1$ pochodnych w tym przedziale, $x, x_0 \in (a,b)$, a punkt ξ leży pomiędzy punktami x i x_0. Przypomnijmy, że przyjęliśmy konwencję $0! = 1$.

Wzór Taylora zapisujemy krócej:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_{n+1}(x),$$

gdzie

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

W przypadku gdy $x_0 = 0$ wzór Taylora nazywa się **wzorem Maclaurina** i ma postać

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}x^j + R_{n+1}(x), \qquad R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

22.2. Wzór dwumianowy Newtona. Zastosujmy wzór Maclaurina do funkcji $f(x) = (a+x)^n$. Oczywiście f jest wielomianem stopnia n, więc $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$, czyli $R_{n+1}(x) \equiv 0$. Obliczmy, dla $j \leqslant n$

$$f^{(j)}(x) = n(n-1)\dots(n-j+1)(a+x)^{n-j},$$

skąd

$$f^{(j)}(0) = n(n-1)\dots(n-j+1)a^{n-j}.$$

Oznaczmy

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Mamy więc

$$(a+x)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

lub, krócej

$$(a+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j}x^j. \tag{1}$$

22.3. Wzór dwumianowy (1) można wyprowadzić prościej, nie posługując się wzorem Taylora. Ale prezentacja, którą przedstawiliśmy sugeruje następny krok. Niech teraz $\alpha \neq 0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Funkcja $f(x) = (1+x)^\alpha$ ma wszystkie pochodne w przedziale $(-1, +\infty)$. Obliczmy, dla wszystkich $j \geqslant 0$

$$f^{(j)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j+1)(1+x)^{\alpha-j},$$

skąd

$$f^{(j)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j+1).$$

Stosując wzór Maclaurina otrzymujemy, dla $x > -1$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

gdzie

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

dla jakiegoś ξ leżącego pomiędzy 0 i x. Wprowadzając naturalne oznaczenia

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!}, \quad j = 1, 2, \dots$$

otrzymujemy

$$(1+x)^\alpha = \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j + R_{n+1}(x), \tag{2}$$

gdzie

$$R_{n+1}(x) = \binom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

dla jakiegoś ξ leżącego pomiędzy 0 i x.

22.4. Przykład. Obliczymy $\sqrt[3]{1,03}$ używając wzoru (2). Mamy

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1,03} =& (1+0,03)^{\frac{1}{3}} \\ =& 1 + \frac{1}{3}(0,03) + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}(0,03)^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}(1+\xi)^{\frac{1}{3}-3}(0,03)^3 \\ =& 1 + \frac{0,03}{3} - \frac{(0,03)^2}{9} + \frac{5(0,03)^3}{81}(1+\xi)^{\frac{1}{3}-3}.\end{aligned}$$

Ponieważ $0 < \xi$, więc $0 < (1+\xi)^{\frac{1}{3}-3} < 1$, skąd

$$\sqrt[3]{1,03} = 1 + \frac{0,03}{3} - \frac{(0,03)^2}{9} \pm \frac{5(0,03)^3}{81}.$$

22.5. n-ty wielomian Taylora funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x}$ w punkcie $x_0 = 0$ ma postać

$$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j x^j,$$

gdyż, jak łatwo policzyć,

$$\binom{-1}{j} = (-1)^j.$$

Podstawiając w poprzednim wzorze $-x$ za x otrzymujemy n-ty wielomian Taylora dla $\frac{1}{1-x}$ w punkcie 0

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

Do obliczenia reszty R_{n+1} nie musimy korzystać ze wzoru Taylora, gdyż wiemy, że

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

skąd

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}.$$

Dalej, mamy

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}. \tag{3}$$

22.6. Ponieważ dla każdego n

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t},$$

więc, dla każdego n

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n-1} + R(x), \tag{4}$$

gdzie

$$R(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt.$$

Oszacujemy $R(x)$. Dla $x \geqslant 0$ mamy

$$0 < \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leqslant \int_0^x t^n\, dt = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

a dla $-1 < x < 0$, i $x < t < 0$

$$\frac{1}{1+t} < \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-|x|}.$$

Stąd

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt\right| \leqslant \frac{1}{1-|x|}\left|\int_0^x t^n\, dt\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)(n+1)}.$$

Otrzymaliśmy więc

$$|R(x)| \leqslant \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1}; & \text{dla} \quad x \geq 0 \\ \frac{1}{1-|x|}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}; & \text{dla} \quad -1 < x \leq 0. \end{cases}$$

Podobnie,

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1-t} dt \tag{5}$$

Dodając stronami (4) i (5) zauważamy, że parzyste potęgi się skrócą i otrzymujemy

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \cdots + \frac{2x^{2m+1}}{2m+1} + R(x), \tag{6}$$

gdzie

$$R(x) = 2\int_0^x \frac{t^{2m+2}}{1-t^2}\, dt. \tag{7}$$

Ostatnią całkę jest łatwo policzyć, i otrzymujemy, dla $0 < x < 1$

$$0 < R(x) = 2\int_0^x \frac{t^{2m+2}}{1-t^2} dt \leqslant \frac{1}{1-x^2}\frac{x^{2m+3}}{2m+3}.$$

22.7 Wzór (6) łatwo można wykorzystać do liczenia logarytmów liczb $a > 1$. Istotnie, zauważmy, że każdą liczbę $a > 0$ można zapisać jako

$$a = \frac{1+x}{1-x}, \quad \text{gdzie } x = \frac{a-1}{a+1}.$$

Łatwo zauważyć, że jeżeli $a > 1$ to $0 < x < 1$. Można więc zastosować do a wzory (6) i (7). Stąd

$$\log a = 2\frac{a-1}{a+1} + \frac{2}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \cdots + \frac{2}{2m+1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2m+1} + 2R(x),$$

gdzie

$$0 \leqslant R(x) \leqslant \frac{(a+1)^2}{2a}\frac{1}{2m+3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2m+3}.$$

Dla $a = 2$ i $m = 1$ otrzymujemy

$$\log 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3^3} + R(x),$$

gdzie

$$0 < R(x) \leqslant \frac{9}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}.$$

Stąd

$$0,692 < \log 2 < 0,694.$$

Zauważmy, że $\log 2$ można policzyć również z (4), wraz z z oszacowaniem $R(x)$.

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n} + R, \quad |R| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Żeby wyliczyć $\log 2$ z tego wzoru, z dokładnością do $0,002$ musielibyśmy dodać około 50 składników.

22.8 Liczba π. Przypomnijmy wzór (3)

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} + (-1)^n\frac{t^{2n}}{1+t^2}.$$

Całkując od 0 do x otrzymujemy

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j-1}\frac{x^{2j-1}}{2j-1} + R,$$

gdzie

$$R = (-1)^n\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt,$$

skąd

(8) $$|R| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}.$$

Ponieważ $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ otrzymujemy

(9) $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + R,$$

gdzie

$$|R| \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$

Aby obliczyć stąd $\pi/4$ z dokładnością $1/n$ trzeba dodać około $n/2$ składników. Jednakże formuła (9) daje małe błędy gdy x jest bliskie zera. Możemy skorzystać z następującego wzoru trygonometrycznego

$$\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg}\frac{u+v}{1-uv}.$$

Jeżeli weźmiemy, na przykład, $u = 1/2$ i $v = 1/3$, to

(10) $$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

Inne kombinacje, $u = 1/3$ i $v = 1/7$ oraz $u = 1/5$ i $v = 1/8$ dają

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}, \quad \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8},$$

czyli

$$\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{8}. \tag{11}$$

22.9 Wzór Taylora dla funkcji wykładniczej $x \to e^x$ daje

$$e^x = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

skąd

$$e = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}, \quad 0 < \xi < 1.$$

Wynika stąd, że e jest liczbą niewymierną. Istotnie, załóżmy, że $e = \frac{p}{q}$. Weźmy $n > q$, wtedy

$$\frac{p}{q} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}, \quad 0 < \xi < 1.$$

Mnożąc obie strony przez $n!$ otrzymujemy same liczby całkowite poza ostatnim składnikiem, który jest równy $e^{\xi}/(n+1)$. Ponieważ $e < 3$, więc i $e^{\xi} < 3$, czyli liczba $e^{\xi}/(n+1)$ nie może być całkowita dla $n > 3$. To daje sprzeczność.

22.10 Oto wzory Taylora dla funkcji $\cos x$ i $\sin x$ w punkcie $x_0 = 0$. Mamy

$$\left.\frac{d^k \cos x}{dx^k}\right|_{x=0} = \begin{cases} (-1)^j & \text{gdy} \quad k = 2j, \\ 0 & \text{gdy} \quad k = 2j+1, \end{cases} \qquad \left.\frac{d^k \sin x}{dx^k}\right|_{x=0} = \begin{cases} (-1)^j & \text{gdy} \quad k = 2j+1, \\ 0 & \text{gdy} \quad k = 2j \end{cases}.$$

stąd

$$\cos x = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + R, \quad |R| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$\sin x = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + R, \quad |R| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$