Wykład z analizy

TYDZIEŃ 23.

CIĄGI

23.1. *Ciągiem* nazywamy funkcję określoną na liczbach naturalnych, do których często dodajemy jeszcze liczbę 0: $\mathbf{N} \ni n \to a(n) \in \mathbf{R}$. Zazwyczaj zamiast $a(n)$ piszemy a_n. Często wypisujemy tylko *początkowe wyrazy ciągu* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jeżeli w sposób jasny wynika z nich postać *wyrazu ogólnego* a_n. Na przykład

$$1, 3, 5, 7, \ldots \quad a_n = 2n + 1, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

$$1, 0, 1, 0, \ldots \quad a_n = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \\ 0 & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \end{cases} \tag{2}$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots \quad a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}. \tag{3}$$

Ciąg (3) nazywa się czasem ciągiem liczb Fibonacciego.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x przez $[x]$ oznaczamy jej **część całkowitą**, czyli największą liczbę całkowitą $\leqslant x$. Mamy więc zawsze $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

23.2. Rozważmy następujące cztery ciągi:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \quad a_n = \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$1, 0, \frac{1}{10}, 0, \frac{1}{100}, 0, \ldots \quad a_{2n+1} = 10^{-n}, \quad a_{2n} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$
$$1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \ldots \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Widzimy, że w każdym z tych ciągów dalekie wyrazy są bliskie 0. Innymi słowy, biorąc dowolne $\epsilon > 0$ znajdziemy takie N, że dla $n > N$ $|a_n| < \epsilon$. W pierwszym i drugim ciągu możemy wziąć $N = [\frac{1}{\epsilon}]$, w trzecim $N = [-\frac{1}{2}\log_{10}\epsilon]$, w czwartym $N = [\epsilon^{-2}]$. Ciągi te są *zbieżne* do 0.

Definicja. Mówimy, że ciąg a_n jest zbieżny do granicy a i piszemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{lub} \quad a_n \to a \quad \text{gdy} \quad n \to \infty,$$

gdy dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbf{N}$ takie, że

$$n > N \to |a_n - a| < \epsilon.$$

Mówimy wtedy, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ *prawie wszystkie wyrazy ciągu* są w odległości mniejszej niż ϵ od a, lub inaczej, że poza skończoną ilością, wszystkie wyrazy ciągu są w odległości mniejszej niż ϵ od a.

Przykład. Niech $a_n = 2 + (-1)^n \frac{1}{n}$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. Mamy $|(2 + (-1)^n \frac{1}{n}) - 2| = |\frac{1}{n}| < \epsilon$, jeśli $n > [\frac{1}{\epsilon}] = N$.

23.3. Mówimy, że ciąg a_n jest zbieżny, jeśli istnieje a takie, że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę. Istotnie jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ i $a \neq b$, to dla $\epsilon = |a - b|/2$, prawie wszystkie wyrazy ciągu są równocześnie w odległości mniejszej niż ϵ od a i od b co jest niemożliwe.

23.4. Zauważmy, że $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$ jest równoważne stwierdzeniu $\lim_{j\to\infty} |a_j| = 0$. Również

$$\lim_{j\to\infty} a_j = \lim_{j\to\infty} a_{j+1} = \lim_{j\to\infty} a_{j+15}.$$

23.5. Dla dowolnej liczby α mamy $\lim_{n\to\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$.

23.6. Jeśli $0 < q < 1$, to $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Istotnie, dla $\epsilon > 0$, ponieważ log jest funkcją rosnącą,

$$q^n < \epsilon \iff n \log q < \log \epsilon. \tag{4}$$

Ponieważ $0 < q < 1$, więc $\log q < 0$, czyli (4) jest równoważna $n > \frac{\log \epsilon}{\log q}$ co zachodzi dla $n > [\frac{\log \epsilon}{\log q}] = N$.

23.7. Mamy również $|q| < 1 \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0$, co wynika natychmiast z 23.4.

23.8. Dla każdego x mamy $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. Weźmy $m = [|x|]$. Wtedy dla $n > m$

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{|x|^m}{m!}\left(\frac{|x|}{m+1}\right)^{n-m},$$

a więc, uzyskujemy następujące dwie nierówności

$$0 \leqslant \left|\frac{x^n}{n!}\right| \leqslant \frac{|x|^m}{m!}\left(\frac{|x|}{m+1}\right)^{n-m}.$$

Zauważmy, że w powyższych nierównościach czynnik $|x|^m/m!$ jest stały, niezależny od n. Możemy teraz skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, które jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia o trzech funkcjach, i obserwacji 23.9. Zgodnie z naszym wyborem m zachodzi $|x|/(m+1) < 1$, i wobec 23.7. otrzymujemy

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leqslant \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^m}{m!}\left(\frac{|x|}{m+1}\right)^{n-m} = \frac{|x|^m}{m!}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{|x|}{m+1}\right)^{n-m} = 0.$$

23.9. Własności granic ciągów można łatwo sprowadzić do własności granic funkcji. Istotnie, niech a_n, $n = 0, 1, \ldots$ będzie ciągiem. Określmy funkcję

$$f(x) = a_{[x]}.$$

Funkcja $f(x)$ jest określona na półprostej $\{x \geqslant 0\}$, stała na każdym przedziale postaci $[n, n+1)$, i równa na nim a_n. Nietrudno zauważyć, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x). \tag{5}$$

Istnienie dowolnej z tych dwóch granic pociąga istnienie drugiej, i ich równość.

23.10. Jako wniosek z 23.9. wypiszmy następujące własności granic ciągów. Niech $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$, a c niech będzie stałą. Wtedy

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = \alpha+\beta, \quad \lim_{n\to+\infty}(ca_n) = c\alpha, \quad \lim_{n\to+\infty}(a_nb_n) = \alpha\beta, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{dla} \quad \beta \neq 0.$$

23.11. Zauważmy, że jeśli f jest funkcją ciągłą w punkcie α, i $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$, to $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\alpha)$.

Przykład.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+2}{5n^2-2n+1} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{n^2}}{5-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{\lim_{n\to+\infty} 3 + \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to+\infty} 5 - \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n} + \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

23.12. Piszemy $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ jeśli dla dowolnego M $a_n > M$ dla prawie wszystkich n oraz $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ jeśli dla dowolnego M $a_n < M$ dla prawie wszystkich n. Równość (5) rozciąga się też na ten przypadek, czyli $\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{x\to+\infty} a_{[x]} = \pm\infty$. Mówimy wtedy, że ciąg $a_n \quad n = 0, 1, \ldots$ jest **rozbieżny do plus bądź minus nieskończoności.** Ciąg w ogóle nie mający granicy nazywa się ciągiem rozbieżnym. Ciąg $1, 0, 1, 0 \ldots$ jest rozbieżny (ale nie jest rozbieżny do nieskończoności). Widzimy, że nie ma takiej liczby α dla której prawie wszystkie wyrazy tego ciągu byłyby blisko α.

23.13. Przykłady. (a) Dla $a > 1$ mamy $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$. Ponieważ $a > 1$, więc $a = 1 + b$ dla $b > 0$. Stąd

$$a^n = (1+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k > \binom{n}{2} b^2 = \frac{n(n-1)}{2} b^2,$$

czyli

$$\frac{a^n}{n} > \frac{b^2}{2}(n-1).$$

(b)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n + \sin n}{5n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{5n+1} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{5n+1} = \frac{2}{5} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{5n+1} = \frac{2}{5},$$

gdyż

$$0 \leqslant \left| \frac{\sin n}{5n+1} \right| \leqslant \frac{1}{5n+1},$$

i stosujemy twierdzenie o trzech ciągach.

23.14. Podciągiem a_{k_n}, $n = 0, 1, \ldots$ ciągu a_k, $k = 0, 1, \ldots$ nazywamy ciąg, który powstaje z ciągu a_k, $k = 0, 1, \ldots$ przez opuszczenie pewnych wyrazów w tym ciągu. Oczywiście $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$. Na przykład ciąg $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2n+1} \ldots$, $n = 0, 1, \ldots$ jest podciągiem $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots$, podobnie ciąg

$$a_{2^0}, a_{2^1}, \ldots, a_{2^n}, \ldots \quad n = 0, 1, \ldots$$

jest podciągiem ciągu a_k.

Twierdzenie. *Jeśli ciąg a_k jest zbieżny do granicy α, to każdy jego podciąg jest zbieżny do α.*

Dowód. Istotnie, jeśli dla $\epsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu są w odległości mniejszej niż ϵ od α, to dla każdego podciągu prawie wszystkie jego wyrazy są w odległości mniejszej niż ϵ od α. $\square$

23.15. Niech A będzie dowolnym niepustym podzbiorem liczb rzeczywistych ograniczonym od góry, to znaczy takim, że dla pewnej liczby rzeczywistej M zachodzi $x \leqslant M$ dla wszystkich $x \in A$. **Kresem górnym** zbioru A nazywamy najmniejszą taką liczbę M, czyli najmniejsze ograniczenie zbioru A od góry. Łatwo zauważyć, że kres górny A to taka liczba α dla której

$$(i) \quad \forall_{x\in A} \quad x \le \alpha, \quad (ii) \quad \forall_{\epsilon>0} \exists_{x\in A} \quad x > \alpha - \epsilon.$$

(i) mówi że α jest ograniczeniem A od góry, a (ii) mówi że α jest najmniejszym takim ograniczeniem. Podobnie, niech A będzie dowolnym niepustym podzbiorem liczb rzeczywistych ograniczonym *od dołu*, czyli takim, że $\forall_{x\in A} \quad x \geqslant M$ dla pewnej liczby rzeczywistej M. **Kresem dolnym** zbioru A nazywamy największą taką liczbę M, czyli liczbę α taką, że

$$(i) \quad \forall_{x\in A} \quad x \ge \alpha, \quad (ii) \quad \forall_{\epsilon>0} \exists_{x\in A} \quad x < \alpha + \epsilon.$$

Okazuje się, że kresy zawsze istnieją. Udowodnimy istnienie kresu górnego. Niech a będzie najmniejszą liczbą całkowitą taką, że $\quad \forall_{x\in A} \quad x < a + 1$. Ponieważ a jest *najmniejsza*, więc musi istnieć $x_0 \in A$ takie, że $x_0 \geqslant a$. Niech a_1 będzie najmniejszą wśród liczb $0, \ldots, 9$ taką, że $\forall_{x\in A} \quad x < a + \frac{a_1+1}{10}$. Wtedy $\exists_{x_1\in A} \quad a + \frac{a_1}{10} < x_1 < a + \frac{a_1+1}{10}$. Postępując tak dalej otrzymamy ciąg cyfr $0, dots, 9$ taki, że dla wszystkich $x \in A$

$$x < a + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n},$$

oraz istnieje $x_n \in A$ takie, że

$$x_n > a + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Widzimy, że liczba

$$\alpha = a, a_1 a_2 \dots,$$

jest kresem górnym A. Istotnie, dla każdego $x \in A$

$$x < a + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \quad \rightarrow \quad x \leqslant a, a_1 a_2 \dots.$$

Dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje n takie, że $\epsilon > \frac{1}{10^n}$. W zbiorze A istnieje x_n takie, że

$$x_n > a + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} > a, a_1 a_2 \dots - \frac{1}{10^n} > \alpha - \epsilon.$$

23.16. Dla danego niepustego zbioru ograniczonego od góry (od dołu) A, jego kres górny (kres dolny) α jest *jedyny.* Piszemy

$$\alpha = \sup A \quad (\alpha = \inf A).$$

23.17. Ciąg $\alpha_n \quad n = 0, 1, \dots$ nazywa się **rosnący** (**niemalejący**), jeśli $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$, $(a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots)$. Podobnie definiujemy ciąg **malejący** i **nierosnący**. Ciąg $\alpha_n \quad n = 0, 1, \dots$ nazywa się **ograniczony**, jeśli istnieje liczba M taka, że $\forall_n \quad |a_n| \leqslant M$.

Twierdzenie 23.18. *Ciąg a_n, $n = 0, 1, \dots$ niemalejący i ograniczony od góry jest zbieżny.*

Dowód. Istotnie, niech $A = \{a_n : \quad n = 0, 1, 2 \dots\}$. Wtedy

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup A,$$

bo z definicji $\sup A$ dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje N takie, że $a_N > \sup A - \epsilon$ i $\forall_n a_n \leqslant \sup A$. Ponieważ ciąg jest niemalejący mamy więc $\sup A - \epsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant \sup A$. $\square$

Twierdzenie 23.19. *Ciąg a_n, $\quad n = 0, 1, \dots$ nierosnący i ograniczony od dołu jest zbieżny oraz*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf\{a_n : n = 0, 1, \dots\}.$$