Wykład z analizy

Tydzień 24.

Ciągi, szeregi

24.1. Stała Eulera γ. Jako zastosowanie twierdzenia o zbieżności ciągu rosnącego i ograniczonego udowodnimy że istnieje stała γ taka, że

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)=\gamma. \tag{1}$$

Liczbę γ nazywa się stałą Eulera, i $\gamma\sim 0,5772\cdots$. Nie wiadomo, czy γ jest liczbą wymierną. (1) jest równoważne następującemu stwierdzeniu

$$\log n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\gamma+\epsilon_n, \qquad \lim_{n\to+\infty}\epsilon_n=0.$$

Niech

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n, \quad n=1,2,\ldots.$$

Zauważmy następującą nierówność

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}<\log n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}.$$

Powyższa nierówność jest oczywista geometrycznie, jeżeli pamiętamy, że logarytm jest całką z funkcji $1/x$, a funkcja ta jest malejąca. Niech $b_n=1-a_n$, czyli

$$b_n=\log n-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

Z nierówności powyżej otrzymujemy, że b_n jest ciągiem ograniczonym

$$0<b_n<1-\frac{1}{n}<1.$$

Można też zauważyć, patrząc na wykres funkcji $1/x$ i $1/[x+1]$ że b_n jest polem obszaru powiększającego się wraz z n, a więc ciąg b_n jest rosnący.

24.2. Niech a_n będzie ciągiem zbieżnym. Wtedy jeśli $\forall_n \quad a_n\leqslant M$, to $\lim_{n\to+\infty}a_n\leqslant M$. Podobnie, $\forall_n \quad a_n\geqslant M$, to $\lim_{n\to+\infty}a_n\geqslant M$.

Istotnie, jeśli $a=\lim_{n\to+\infty}a_n>M$, to $a-M=\epsilon>0$, a więc prawie wszystkie elementy ciągu a_n należą do przedziału $(a-\epsilon,a+\epsilon)$, a to oznacza, że dla dostatecznie dalekich n $a_n>M$, co przeczy założeniu.

24.3. Warunek Cauchy'ego. Mówimy, że ciąg $a_n, \quad n=0,1,\ldots$ spełnia warunek Cauchy'ego, jeśli dla każdego $\epsilon>0$ istnieje $N\in\mathbf{N}$ takie, że

$$m>N,n>N \quad\to\quad |a_m-a_n|<\epsilon.$$

Warunek Cauchy'ego mówi, że *wszystkie* dostatecznie dalekie wyrazy ciągu są blisko siebie.

Twierdzenie. *Ciąg a_n spełnia warunek Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny.*

Dowód. Załóżmy że $\lim_{n\to+\infty}a_n=a$. Wtedy dla dowolnego $\epsilon>0$ istnieje $N\in\mathbf{N}$ takie, że

$$m>N \quad\to\quad |a_m-a|<\frac{1}{2}\epsilon,$$

oraz

$$n>N \quad\to\quad |a_n-a|<\frac{1}{2}\epsilon.$$

Z obu tych nierówności wynika, że a_n spełnia warunek Cauchy'ego: Jeśli $n, m > N$, to

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leqslant |a_m - a| + |a - a_n| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Załóżmy teraz, że a_n spełnia warunek Cauchy'ego. Wtedy ciąg a_n musi być ograniczony: Jeśli N jest takie, że $\forall_{n>N} \quad |a_n - a_{N+1}| < 1$ to dla *wszystkich* n zachodzi $|a_n| \leqslant \max\{|a_{N+1}| + 1, |a_0|, \dots, |a_N|\}$. Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa wynika, że ciąg a_n zawiera zbieżny podciąg a_{k_n}. Niech $a = \lim_{n\to+\infty} a_{k_n}$. Wtedy dla $\epsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbf{N}$ takie, że dla wszystkich $n > N$ mamy

$$|a_{k_n} - a| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Z drugiej strony, korzystając z warunku Cauchy'ego otrzymujemy $M \in \mathbf{N}$ takie, że dla $n, m > M$

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Jeżeli $K = \max\{N, M\}$ i $n > K$, to

$$|a_n - a| = |a_n - a_{k_{K+1}} + a_{k_{K+1}} - a| \leqslant |a_n - a_{k_{K+1}}| + |a_{k_{K+1}} - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

(skorzystaliśmy z faktu, że dla dowolnego podciągu zachodzi $k_n \geqslant n$). $\square$

Twierdzenie 24.4. *Niech A będzie zbiorem ograniczonym od góry i niech $a = \sup A$ będzie jego kresem górnym. Istnieje ciąg niemalejący a_n elementów z A taki, że $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.*

Dowód. Ponieważ a jest kresem górnym A, więc dla każdego $n = 1, 2, \dots$ istnieje element $a_n \in A$ taki, że $a_n \in A \cap (\max\{a - \frac{1}{n}, a_{n-1}\}, a]$. $\square$

Możemy teraz udowodnić twierdzenie, którego dowód odłożyliśmy.

Twierdzenie 10.6. *Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale domkniętym $[a, b]$. Wtedy istnieją punkty $x_1, x_2 \in [a, b]$ w których funkcja f przyjmuje wartość maksymalną oraz wartość minimalną, czyli*

$$f(x_1) \geqslant f(x) \text{ dla każdego } x \in [a, b], \quad f(x_2) \leqslant f(x) \text{ dla każdego } x \in [a, b].$$

Dowód. Niech $A = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ (czyli A jest zbiorem wartości f). Pokażemy najpierw, że A jest ograniczony. Udowodnimy tylko że zbiór A jest ograniczony od góry, gdyż ograniczenie od dołu można pokazać podobnie. Istotnie, gdyby A nie był ograniczony od góry, to dla każdego n istniałby punkt $a_n \in [a, b]$ taki że $f(a_n) > n$. Ponieważ ciąg a_n jest ograniczony, więc zawiera podciąg a_{k_n} zbieżny. Niech $c = \lim_{n\to+\infty} a_{k_n}$. Z 24.2. wynika, że $c \in [a, b]$. Ponieważ f jest funkcją ciągłą, $\lim_{n\to+\infty} f(a_{k_n}) = f(c)$, co jest niemożliwe, bo ciąg $f(a_{k_n})$, $n = 0, 1, \dots$, jest rozbieżny do $+\infty$.

W takim razie A musi być ograniczony od góry. Niech $a = \sup A$. Istnieje wtedy ciąg $y_n = f(a_n)$, $a_n \in [a, b]$ taki, że $\sup A = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Z ciągu a_n wybieramy podciąg zbieżny, niech $x_1 = \lim_{n\to+\infty} a_{k_n}$. Wtedy, ponieważ f jest ciągła $f(x_1) = \lim_{n\to+\infty} f(a_{k_n}) = \lim_{n\to+\infty} y_{k_n} = \sup A$. $\square$

24.5. Niech a_n, $n = 1, 2, \dots$ będzie ciągiem. *Ciągiem sum częściowych szeregu o wyrazach* a_n nazywamy ciąg

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Zamiast mówić o ciągu a_n, mówimy o szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, a ciąg a_n nazywamy ciągiem wyrazów tego szeregu. Jeśli ciąg S_n jest zbieżny piszemy

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

i mówimy, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny.

Twierdzenie 24.6. *Jeśli szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny, to zbieżny jest także szereg, do wyrazów którego dodamy dowolny skończony ciąg.*

Dowód. Niech ciąg a_n, $n = 1, 2, \dots$ będzie dany, i niech $b_1, \dots, b_k$ będzie dowolnym ciągiem skończonym.Utwórzmy ciąg a'_n

$$a'_n = \begin{cases} a_n + b_n & \text{dla} \quad n \leqslant k \\ a_n & \text{dla} \quad n > k. \end{cases}$$

Wtedy, dla $n \geqslant k$

$$S'_n = \sum_{j=1}^{n} a'_j = b_1 + \cdots + b_k + S_n,$$

skąd wynika, że S'_n jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy S_n jest zbieżny. $\square$

Wynika stąd, że zbieżność szeregu nie zależy od jego początkowych wyrazów, czyli pierwsze k wyrazów szeregu możemy zastąpić innymi.

24.7. Ze wzoru Taylora wynika, że dla $-1 < x < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \log(x+1),$$

gdyż

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} - \log(1+x) \right| \leqslant \frac{|x|^{n+2}}{(1-|x|)(n+1)},$$

a to ostatnie wyrażenie ma granicę 0. W szczególności

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \log 2.$$

Warunek Cauchy'ego dla szeregów. 28.8. . *Szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego* $\epsilon > 0$ *istnieje* N *takie, że*

$$n > m > N \quad \to \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon.$$

Dowód. Dowód wynika natychmiast z faktu, że

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right|.$$

$\square$

Twierdzenie 24.9. *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny. Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

jest zbieżny dla wszystkich $\alpha > 1$.

Dowód. Mamy dla $k > 0$

$$\frac{1}{k} \geqslant \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \quad \text{skąd} \quad \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \int_{m+1}^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \log n + 1 - \log m + 1 = \log \frac{n+1}{m+1}$$

Wtedy $\sum_{k=m+1}^{2m+1} \frac{1}{k} \geqslant \log 2$ niezależnie od tego jak duże m weźmiemy, czyli szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

nie spełnia warunku Cauchy'ego, więc jest rozbieżny.

Podobnie dla $n > m > 1$

$$\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

skąd

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_m^n \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{m^{\alpha-1}} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{m^{\alpha-1}}.$$

Ponieważ $\alpha > 1$, więc $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{m^{\alpha-1}} = 0$, co pokazuje, że spełniony jest warunek Cauchy'ego, czyli szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

jest zbieżny dla $\alpha > 1$. $\square$

24.10. Mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \log 2 \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2j+1} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \to +\infty.$$

Nie jest więc prawdą, że jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny to dla każdego podciągu a_{n_k} szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ też jest zbieżny.