Wykład z analizy

Tydzień 25.

Szeregi

25.1. *Szeregiem geometrycznym* nazywamy szereg

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j.$$

Szereg ten jest zbieżny dla $|q| < 1$ oraz rozbieżny dla $|q| \geqslant 1$, bo

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} q^j = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

25.2.Przykład. Szereg $\sum_{j=1}^{\infty} jq^{j-1}$ jest zbieżny do $\frac{1}{(1-q)^2}$ dla $|q| < 1$. Istotnie, mamy

$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Różniczkując obie strony po q otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{n} jq^{j-1} = \frac{-(n+1)q^n(1-q)+1-q^{n+1}}{(1-q)^2},$$

skąd

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} jq^{j-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-(n+1)q^n(1-q)+1-q^{n+1}}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

25.3. Z twierdzenia o granicach ciągów zastosowanych do ciągów sum częściowych mamy

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = A \quad , \sum_{j=0}^{\infty} b_j = B \quad \to \quad \sum_{j=0}^{\infty} ca_j = cA \quad \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j) = A + B.$$

Twierdzenie 25.4. *Niech $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ będzie szeregiem o wyrazach nieujemnych czyli $a_j \geqslant 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Wtedy, jeśli ciąg sum częściowych jest ograniczony, czyli $\exists_M \quad \forall_n \quad \sum_{j=0}^{n} a_j \leqslant M$, to szereg $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ jest zbieżny.*

Dowód. Istotnie, jeśli $a_j \geqslant 0$, to ciąg sum częściowych jest niemalejący, a więc jeśli jest ograniczony to jest zbieżny. □

Jeśli szereg $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ o wyrazach nieujemnych jest zbieżny, to piszemy

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty.$$

Definicja 25.5. *Mówimy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.*

Twierdzenie. *Jeśli szereg $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny.*

Dowód. Mamy

$$\left| \sum_{j=m}^{n} a_j \right| \leqslant \sum_{j=m}^{n} |a_j|,$$

czyli szereg $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ musi spełniać warunek Cauchy'ego, jeśli szereg $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ spełnia. □

Twierdzenie (Test Porównawczy) 25.6. *Niech* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *i* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *będą dwoma szeregami i niech wyrazy* b_j *będą nieujemne:* $b_j \geqslant 0$. *Wtedy, jeżeli*

$$|a_j| \leqslant b_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \quad \textit{oraz} \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j < \infty,$$

to szereg $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *też jest zbieżny.*

Dowód. Mamy

$$\left| \sum_{j=m}^{n} a_j \right| \leqslant \sum_{j=m}^{n} |a_j| \leqslant \sum_{j=m}^{n} b_j,$$

czyli szereg $\sum a_j$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny. □

25.7. Przykład. Niech

$$x = a, a_1 a_2 \ldots$$

będzie liczbą rzeczywistą. Wtedy

$$x = \lim_{n \to +\infty} \left(a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \right) = a + \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{10^j} = a + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{10^j}.$$

Istotnie,

$$\frac{a_j}{10^j} \leqslant \frac{9}{10^j},$$

oraz

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{9}{10^j} = \frac{9}{10} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{10^j} = 1.$$

Twierdzenie (Test Całkowy) 25.8. *Niech* $\mathbf{R}^+ \ni t \to f(t)$ *będzie funkcją ciągłą, nieujemną i nierosnącą. Wtedy całka niewłaściwa*

$$\int_1^{\infty} f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_1^n f(t)dt$$

istnieje wtedy i tylko wtedy gdy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty.$$

Test jest uogólnieniem rozumowania w 24.9.

Dowód twierdzenia. Zauważmy, że ponieważ wykres funkcji f maleje, więc

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leqslant \int_1^n f(t)dt \leqslant f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1).$$

Wszystkie wyrażenia rosną wraz z n, czyli są zbieżne, jeżeli są ograniczone od góry. Jeżeli zbieżny jest szereg to prawa nierówność pociąga istnienie całki niewłaściwej. Jeżeli istnieje całka niewłaściwa, to lewa nierówność pociąga zbieżność szeregu. Wynika stąd także, że

$$\int_2^{\infty} f(t)\, dt \leqslant \sum_{j=2}^{\infty} f(j) \leqslant \int_1^{\infty} f(t)\, dt,$$

jeżeli wyrażenia są zbieżne. □

Twierdzenie (Test Ilorazowy) 25.9. *Niech $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ będzie szeregiem o wyrazach dodatnich. Wtedy*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \to \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \to \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j = \infty,$$

(czyli jest rozbieżny).

Dowód. Istotnie, jeśli $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, to dla η takiego, że $L < \eta < 1$ istnieje N takie, że dla wszystkich $n > N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \eta,$$

czyli

$$a_{n+1} < \eta a_n.$$

Wynika stąd, że

$$a_{N+2} < \eta a_{N+1}, \quad a_{N+3} < \eta^2 a_{N+1}, \quad \dots \quad a_{N+k} < \eta^{k-1} a_{N+1}.$$

Stąd, szereg

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$$

ma wyrazy nie większe niż szereg

$$a_{N+1} \sum_{j=0}^{\infty} \eta^j,$$

co przez kryterium porównawcze daje pierwszą część testu ilorazowego. Jeśli $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, to (podobnie jak powyżej) dla $n > N$ mamy $a_n \geqslant a_{N+1}(1+\eta)^{n-N+1}$, czyli szereg $\sum_{j=N+1}^{\infty} a_j$ jest rozbieżny, bo wyrazy szeregu nie dążą do zera. □

25.10. Przykłady. (a) Szereg $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j!}}$ jest zbieżny, bo $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n!}{(n+1)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 < 1$.

(b) Kryterium ilorazowe nie zawsze pozwala rozstrzygnąć czy szereg jest zbieżny czy nie. Np. Szereg $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^s}$ przy $s > 1$ jest zbieżny a szereg $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^s}$ przy $0 < s \leq 1$ jest rozbieżny, a w obu przypadkach $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Twierdzenie 25.11. *Niech $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > 0$ oraz $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Wtedy szereg*

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j = a_0 - a_1 + a_2 + \dots$$

jest zbieżny.

Dowód. Sprawdzamy, że szereg $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$ spełnia warunek Cauchy'ego. Niech $m = 2k$, $n = 2l + 1$ wtedy

$$\sum_{j=m}^{n} (-1)^j a_j = (a_{2k} - a_{2k+1}) + (a_{2k+2} - a_{2k+3}) + \cdots + (a_{2l} - a_{2l+1}) > 0,$$

oraz

$$\sum_{j=m}^{n} (-1)^j a_j = a_{2k} - (a_{2k+1} - a_{2k+2}) - (a_{2k+3} - a_{2k+4}) - \cdots - (a_{2l-1} - a_{2l}) - a_{2l+1} \leqslant a_{2k}.$$

Ponieważ $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 0$, widzimy, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbf{N}$ takie, że dla parzystych m i nieparzystych n

$$\left| \sum_{j=m}^{n} (-1)^j a_j \right| < \epsilon,$$

przy $n > m > N$. Jeśli n i m są dowolne , to $|\sum_{j=k}^{r} a_j|$ różni się od $|\sum_{j=m}^{n} a_j|$ gdzie m jest parzyste, a n nieparzyste tylko co najwyżej o dwa wyrazy, które dążą do zera. To dowodzi, że szereg $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j$ spełnia warunek Cauchy'ego. □

Twierdzenie 25.12. *Jeśli szereg $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ jest bezwzględnie zbieżny, to jego suma nie zależy od kolejności sumowanych wyrazów.*

Dowód tego twierdzenia nie jest trudny, ale wymaga sprecyzowania, co to znaczy przestawianie wyrazów szeregu. Wiemy, że jeśli tylko zmienimy miejscami skończenie wiele wyrazów szeregu to jego suma nie ulegnie zmianie, niezależnie od tego czy szereg jest zbieżny bezwzględnie czy tylko zbieżny.

Zauważmy, że twierdzenie to nie jest prawdziwe dla szeregów, które nie są bezwzględnie zbieżne. Oczywiście przestawiamy wyrazy bliskie z wyrazami dalekimi. Wiemy, że szereg $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \frac{1}{j}$ jest zbieżny, ale nie bezwzględnie. Widzieliśmy wcześniej, że w tym przypadku suma szeregu zależy od kolejności sumowania wyrazów.

Twierdzenie Cauchy'ego o mnożeniu szeregów 25.13. *Niech $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = A$ i $\sum_{j=0}^{\infty} b_j = B$ będą dwoma szeregami bezwzględnie zbieżnymi. Wtedy*

$$AB = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} a_j b_k \right).$$

Sprawdzimy to twierdzenie na przykładzie, że zachodzi dla szeregów

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} = e^a, \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j}{j!} = e^b.$$

Istotnie,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} \frac{a^j b^k}{j!k!} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{a^j b^{n-j}}{j!(n-j)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} a^j b^{n-j} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = e^{a+b}.
\end{aligned}$$

25.14. Niech $a_0, a_1, \ldots$ będzie ciągiem liczb, x_0 ustaloną liczbą w przedziale (a, b) a $x \in (a, b)$. *Szeregiem potęgowym* o współczynnikach $a_0, a_1, \ldots$ nazywamy szereg

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots.$$

Jeśli $x_0 = 0$ wtedy szereg potęgowy ma postać

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j.$$

Dla ustalonego x szereg potęgowy jest zwykłym szeregiem liczbowym, który może być zbieżny lub nie. Mówimy wtedy, że szereg potęgowy jest zbieżny lub nie „w punkcie x". Oczywiście szereg potęgowy jest zawsze zbieżny w punkcie x_0, bo wtedy $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j = a_0 + 0 + \ldots$.

Twierdzenie 25.15. *Niech $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_)^j$ będzie szeregiem potęgowym. Istnieje liczba $R \geqslant 0$, być może równa $+\infty$, która nazywa się promieniem zbieżności szeregu potęgowego, taka, że szereg ten jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich x takich, że $|x - x_0| < R$ i jest rozbieżny dla wszystkich x takich, że $|x - x_0| > R$. (Dla punktów x takich, że takich, że $|x - x_0| = R$ bywa różnie.)*

Dowód tego twierdzenia jest oparty na lemacie Abela.

Lemat Abela. *Jeśli szereg potęgowy $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ jest zbieżny dla pewnego $x = \rho \neq 0$, to szereg ten jest zbieżny bezwzględnie dla każdego $|x| < |\rho|$ oraz istnieje stała M taka, że*

$$\forall_j \quad |a_j| \leqslant \frac{M}{|\rho|^j}. \tag{1}$$

Dowód. Zbieżność szeregu $\sum_{j=0}^{\infty} a_j\rho^j$ pociąga, że $\lim_{j\to\infty} a_j\rho^j = 0$. Więc $\exists_N$ takie, że $|a_j||\rho|^j < 1$ dla $j > N$. Biorąc $M = \max\{1, |a_0|, |a_1||\rho|, \ldots, |a_N||\rho|^N\}$ otrzymujemy (1).

Jeśli $|x| < |\rho|$, to $|\frac{x}{\rho}| < 1$, skąd wobec (1) mamy

$$|a_j x^j| \leqslant M \left|\frac{x}{\rho}\right|^j,$$

a ponieważ $M \sum_{j=0}^{\infty} |\frac{x}{\rho}|^j$ jest zbieżny, z kryterium porównawczego wynika, że $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ jest bezwzględnie zbieżny. □

Dowód Twierdzenia 25.15. Z lematu Abela wynika, że jeśli

$$R = \sup\left\{|\rho| : \sum_{j=0}^{\infty} a_j\rho^j \quad \text{jest zbieżny}\right\}, \tag{2}$$

to $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$ jest bezwzględnie zbieżny dla x takich, że $|x - x_0| < R$, bo $|x - x_0| < R \to |x - x_0| < |\rho| < R$ dla jakiegoś ρ ze zbioru w (2), a wtedy $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$ jest zbieżny.

Z drugiej strony, jeśli $|x - x_0| > R$, to szereg $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$ jest rozbieżny z definicji R: $R = \sup\{|\rho| : \sum_{j=0}^{\infty} a_j\rho^j \quad \text{jest zbieżny}\}$. □

25.16. Przykłady. (a) Szereg $\sum_{j=0}^{\infty} j!x^j$ jest rozbieżny dla każdego $x \neq 0$, bo $\lim_{n\to+\infty} n!|x|^n = \infty$ dla $x \neq 0$, więc wyrazy szeregu nie dążą do zera.
(b) Szereg geometryczny $\sum_{j=0}^{\infty} x^j$ ma promień zbieżności równy 1, bo dla $|x| < 1$ szereg jest bezwzględnie zbieżny, dla $|x| > 1$ jest rozbieżny.
(c) Szereg $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}x^j$ jest zbieżny dla każdego x do e^x. Jego promień zbieżności jest równy $+\infty$.
(d) Szereg $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1}x^j$ jest zbieżny do $\log(1 + x)$. Jest bezwzględnie zbieżny dla $|x| < 1$ i jest rozbieżny dla $|x| > 1$, bo wtedy jego wyrazy dążą do $+\infty$. Więc jego promień zbieżności jest równy 1. Dla $x = 1$ szereg ten jest zbieżny, a dla $x = -1$ rozbieżny.
(e) Szereg $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1}x^{2j+1}$ jest zbieżny dla $|x| < 1$ i wtedy jego suma jest równa $\operatorname{arctg} x$. Jest rozbieżny dla $|x| > 1$.