Wykład z analizy

TYDZIEŃ 26.

FUNKCJE ANALITYCZNE

26.1. Twierdzenie. *Niech szereg potęgowy*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j \tag{1}$$

będzie zbieżny dla $|x-x_0|<R$ *przy czym* $R>0$ *(czyli ma ściśle dodatni promień zbieżności). Oznaczmy jego sumę przez* $f(x)$*. Innymi słowy, funkcja* $f(x)$ *jest określona dla* $|x-x_0|<R$ *wzorem*

$$f(x)\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j.$$

Wtedy funkcja $f(x)$ *jest ciągła i różniczkowalna w przedziale* (x_0-R, x_0+R) *oraz*

$$f'(x)=\sum_{j=1}^{\infty} ja_j(x-x_0)^{j-1}, \tag{2}$$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_j}{j+1}(x-x_0)^{j+1}. \tag{3}$$

Jak widać, szeregi potęgowe (o ściśle dodatnim promieniu zbieżności) można różniczkować i całkować wyraz za wyrazem, jak wielomiany. Udowodnimy tylko, że szeregi (1), (2) i (3) mają te same promienie zbieżności. Fakt, że suma szeregu (2) jest równa pochodnej funkcji $f(x)$, a suma szeregu (3) jest równa pierwotnej funkcji $f(x)$ opuszczamy.

Dowód. Niech R, R_1, R_2 będą promieniami zbieżności szeregów (1),(2) i (3) odpowiednio. Załóżmy, że $R>0$. Niech $0<\rho<R$. Wtedy z lematu Abela wynika, że dla pewnej stałej M mamy $|a_n|\leqslant\frac{M}{\rho^n}$, skąd dla $|x-x_0|<\rho$

$$\begin{aligned}
\left|na_n(x-x_0)^{n-1}\right| &\leqslant n\frac{M}{\rho}\left(\frac{|x-x_0|}{\rho}\right)^{n-1},\\
\left|\frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1}\right| &\leqslant \frac{M|x-x_0|}{n+1}\left(\frac{|x-x_0|}{\rho}\right)^{n}\\
&\leqslant M|x-x_0|\left(\frac{|x-x_0|}{\rho}\right)^{n}.
\end{aligned}$$

Wynika stąd, że wyrazy szeregu (2) i (3) są co do bezwzględnej wartości nie większe niż odpowiednie wyrazy bezwzględnie zbieżnych szeregów

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\frac{M}{\rho}\left(\frac{|x-x_0|}{\rho}\right)^{j-1},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} M|x-x_0|\left(\frac{|x-x_0|}{\rho}\right)^{j}.$$

Zbieżność pierwszego szeregu wynika natychmiast z kryterium porównawczego. Można też łatwo udowodnić (było to zrobione), że jego suma jest równa

$$\frac{M}{\rho}\left(1-\frac{|x-x_0|}{\rho}\right)^{-2}.$$

Używając kryterium porównawczego, widzimy, że szeregi (2) i (3) są bezwzględnie zbieżne dla $|x - x_0| < \rho < R$, co dowodzi, że $R_1 \geqslant R$ i $R_2 \geqslant R$. Ale szereg (1) powstaje z szeregu (2) przez całkowanie wyrazu po wyrazie, a z szeregu (3) przez różniczkowanie wyrazu po wyrazie. A więc $R \geqslant R_2$ i $R \geqslant R_1$, co daje $R = R_1 = R_2$. $\square$

26.2. Przykład. Wiemy, że funkcja wykładnicza $x \to f(x) = e^x$ spełnia równanie różniczkowe

$$f'(x) = f(x)$$

z warunkiem $f(0) = 1$. Chcemy przedstawić funkcję wykładniczą w postaci szeregu potęgowego

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j.$$

Ponieważ $f(0) = a_0$, mamy $a_0 = 1$. Innymi słowy, chcemy więc funkcję f napisać w postaci szeregu

$$f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots, \tag{4}$$

przy czym zakładamy, że szereg można różniczkować wyraz za wyrazem

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots.$$

Wtedy, ponieważ $f'(x) = f(x)$ porównując współczynniki przy kolejnych potęgach x mamy

$$a_1 = 1, \quad 2a_2 = a_1, \quad 3a_3 = a_2, \quad 4a_4 = a_3 \quad \dots,$$

czyli

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}, \dots.$$

Stąd

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

W ten sposób, przy założeniu, że $f(x)$ można zapisać przy pomocy szeregu potęgowego (4), i że szereg ten można różniczkować wyraz za wyrazem, uzyskaliśmy powyższy szereg. Aby sprawdzić, że tak otrzymany szereg jest zbieżny, możemy zastosować kryterium ilorazowe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

co pokazuje, że szereg ten jest zbieżny dla każdego x. W ten sposób otrzymaliśmy rozwinięcie funkcji wykładniczej w szereg potęgowy niezależnie od wzoru Taylora.

26.3. Załóżmy, że funkcja $x \to f(x)$ może być zapisana w postaci szeregu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{5}$$

którego promień zbieżności R jest ściśle dodatni. Stosując wielokrotnie twierdzenie 26.1 otrzymujemy

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2},$$

i ogólnie

$$f^{(j)}(x) = \sum_{n=j}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-j+1) a_n (x - x_0)^{n-j}.$$

Podstawiając w powyższych szeregach $x = x_0$ otrzymujemy

$$f(x_0) = a_0, \quad f'(x_0) = a_1, \quad f''(x_0) = 2a_2, \quad f'''(x_0) = 2 \cdot 3 a_3, \quad \dots \quad f^{(j)}(x_0) = j! a_j,$$

skąd

$$a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}.$$

Widzimy, że jeśli funkcja f może być przedstawiona w postaci szeregu (5), to tylko w jeden sposób

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

Szereg ten nazywamy **szeregiem Taylora** funkcji $f(x)$. Jeśli $x_0 = 0$, to szereg ten nazywa się szeregiem Maclaurina funkcji $f(x)$.

Definicja 26.4. Funkcja $x \to f(x)$ nazywa się analityczna w otoczeniu punktu x_0 jeśli da się przedstawić w postaci szeregu potęgowego

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{6}$$

którego promień zbieżności R jest ściśle dodatni.

Funkcja analityczna ma pochodne wszystkich rzędów w punkcie x_0 i w jego otoczeniu. Istnieją funkcje $f(x)$, które mają pochodne wszystkich rzędów, ale ich szereg Taylora może mieć promień zbieżności równy zero, albo nie być zbieżny do funkcji $f(x)$.

26.5. Przykłady.
(a) Funkcja $x \to 1/x$ jest analityczna w otoczeniu każdego punktu $x_0 \neq 0$. Istotnie

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} =& \frac{1}{x_0 + (x - x_0)} = \frac{1}{x_0} \frac{1}{1 + \frac{x - x_0}{x_0}} \\ =& \frac{1}{x_0} \left(1 - \frac{x - x_0}{x_0} + \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right)^2 - \left(\frac{x - x_0}{x_0} \right)^3 + \dots \right) \\ =& \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{x_0^{j+1}} (x - x_0)^j,\end{aligned}$$

przy czym szereg ten jest zbieżny dla

$$\left| \frac{x - x_0}{x_0} \right| < 1,$$

czyli dla x ze zbioru $\{x : |x - x_0| < |x_0|\}$.
(b) Funkcja wykładnicza jest analityczna w każdym punkcie x_0. Istotnie

$$e^x = e^{x_0} e^{x - x_0} = e^{x_0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (x - x_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{j!} (x - x_0)^j.$$

(c) Funkcja

$$f : x \to \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{dla} & x = 0 \end{cases}$$

ma wszystkie pochodne w punkcie 0 równe 0, tzn, współczynniki szeregu Taylora funkcji f w zerze są równe zero, skąd wynika, że szereg ten jest zbieżny do funkcji równej zero. Nie jest więc zbieżny do funkcji $f(x)$, gdyż dla $x \neq 0$ mamy $f(x) \neq 0$.
(d) Oto szeregi Taylora niektórych funkcji w punkcie $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad R = \infty, & e^{-x} &= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad R = \infty \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \qquad R = \infty, & \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \qquad R = \infty, \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \qquad R = \infty, & \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \qquad R = \infty, \\
\log(1 + x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \qquad R = 1, & \operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \qquad R = 1.
\end{aligned}$$