Wykład z analizy

Tydzień 27.

Reguła de l'Hospitala i inne ciekawe rzeczy

Istnieje bardzo wygodne narzędzie do obliczania granic funkcji w punktach (lub w $\pm\infty$). Metoda ta ma zastosowanie na przykład w sytuacjach gdy mamy policzyć granicę ilorazu, w którym i licznik i mianownik dążą do 0.

27.1. Wyrażenia nieoznaczone 0/0. Niech będą dane dwie funkcje $F(x)$ i $G(x)$ i punkt x_0. Załóżmy, że $F(x)$ i $G(x)$ są w otoczeniu x_0 ciągłe, i mają tam ciągłe pochodne. Dodatkowo załóżmy, że dla $x \neq x_0$ $G'(x) \neq 0$. Jeżeli

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} G(x) = 0, \tag{1}$$

to ułamek $F(x)/G(x)$ nazywamy *wyrażeniem nieoznaczonym typu 0/0 w* x_0. W powyższej sytuacji prawdziwe jest następujące twierdzenie

Twierdzenie (Reguła de l'Hospitala). *Jeżeli istnieje granica*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F'(x)}{G'(x)},$$

to istnieje także granica

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{G(x)},$$

i obie granice są sobie równe

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{F'(x)}{G'(x)}.$$

Dowód. Dowód tego twierdzenia jest natychmiastową konsekwencją uogólnionego twierdzenia o wartości średniej (twierdzenie 21.1.). Weźmy punkt $x \neq x_0$. Istnieje wtedy punkt ξ pomiędzy x_0 i x taki, że

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

($F(x_0)$ i $G(x_0)$ możemy opuścić we wzorze, bo zgodnie z założeniem są zerami.) Tak więc, jeżeli x jest blisko x_0, to ξ jest również blisko x_0, więc prawa strona jest blisko swojej granicy w x_0, więc lewa strona również musi być blisko tej granicy. $\square$

27.2. Przykłady. (a) Obliczymy

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{2x}}{x^3-8}.$$

Stosujemy regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{2x}}{x^3-8} = \lim_{x\to 2} \frac{1-1/\sqrt{2x}}{3x^2} = \frac{1-1/4}{12} = \frac{1}{16}.$$

(b) Regułę de l'Hospitala można stosować wielokrotnie. Może się zdarzyć, że ułamek $F'(x)/G'(x)$ jest znowu wyrażeniem nieoznaczonym typu 0/0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - e^x + 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - e^x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

27.3. Wyrażenia nieoznaczone postaci ∞/∞. Niech funkcje $F(x)$ i $G(x)$ mają wszystkie własności z punktu 27.1., i zamiast (1) spełniają

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} G(x) = +\infty. \tag{2}$$

Wtedy ułamek $F(x)/G(x)$ nazywamy *wyrażeniem nieoznaczonym postaci* ∞/∞ *w* x_0, i prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie (Reguła de l'Hospitala). *Jeżeli istnieje granica*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F'(x)}{G'(x)},$$

to istnieje też granica

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{G(x)},$$

i obie granice są sobie równe.

Dowód. Dowód tylko naszkicujemy. Niech

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L.$$

Niech $x_1 \neq x_0$, i rozważmy dowolny punkt x pomiędzy x_0 i x_1. Wykorzystując uogólnione twierdzenie o wartości średniej otrzymujemy punkt ξ, pomiędzy x i x_1 taki, że

$$\frac{F(x)-F(x_1)}{G(x)-G(x_1)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}. \tag{3}$$

W poprzednim dowodzie zamiast x wzięliśmy x_0, i wykorzystując (1) pominęliśmy $F(x_0)$ i $G(x_0)$. Obecnie wykorzystując (2) zauważamy, że po lewej stronie, gdy x jest blisko x_0, istotne stają się tylko wartości $F(x)$ i $G(x)$. Zapiszmy tą obserwację:

$$\frac{F(x)-F(x_1)}{G(x)-G(x_1)} = \frac{F(x)}{G(x)}\,\frac{1-(F(x_1)/F(x))}{1-(G(x_1)/G(x))},$$

czyli (3) może być zapisane jako

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{1-(G(x_1)/G(x))}{1-(F(x_1)/F(x))}\,\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}. \tag{4}$$

Prawa strona składa się z dwóch ułamków. Zauważmy, że jeżeli x_0 jest wystarczająco blisko x_0, to drugi ułamek jest dowolnie blisko swojej granicy L (niezależnie od wyboru x pomiędzy x_1 i x_0). Z drugiej strony, przy ustalonym x_1 możemy dobrać x tak bliskie x_0, aby pierwszy ułamek (4) był dowolnie blisko 1. Wynika to z faktu, że granica pierwszego ułamka przy $x \to x_0$ wynosi 1. Iloczyn obu ułamków jest więc dowolnie bliski L, dla x_1 wystarczająco bliskiego x_0. $\square$

Jak wynika z powyższego dowodu, warunek (2) można zastąpić warunkiem

$$\lim_{x\to x_0} |F(x)| = \lim_{x\to x_0} |G(x)| = +\infty. \tag{5}$$

27.4. Przykład. Znajdziemy granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log \sin^2 x}{\operatorname{ctg} x}.$$

Zauważmy, że granica licznika wynosi $-\infty$, podczas kiedy granica mianownika nie istnieje: lewostronna wynosi $-\infty$, a prawostronna $+\infty$. Z drugiej strony (5) jest spełnione, wiec korzystamy z reguły de l'Hospitala

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log \sin^2 x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1/\sin^2 x)2\sin x\cos x}{-1/\sin x} = \lim_{x\to 0}(-2\sin x\cos x) = 0.$$

27.5. Oba powyższe twierdzenia pozostają prawdziwe, jeżeli granice zastąpić wszędzie granicami jednostronnymi, i dowody można pozostawić bez zmian. Na przykład

$$\lim_{x\to \pi/2^+} \frac{\log \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to \pi/2^+} \frac{(1/\operatorname{tg} x)1/\cos^2 x}{1/\cos^2 x} = \lim_{x\to \pi/2^+} \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0.$$

Podobnie, twierdzenia pozostają prawdziwe jeżeli granica

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F'(x)}{G'(x)}$$

jest niewłaściwa $\pm\infty$. Oba twierdzenia są też prawdziwe w przypadku gdy $x_0 = \pm\infty$. Obliczmy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2/x}{1/x}.$$

Ułamek jest wyrażeniem nieoznaczonym postaci $0/0$ w $+\infty$. Zastosujemy więc regułę do l'Hospitala.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2/x}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1/(1+4/x^2))(-2/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+4/x^2} = 2.$$

27.6. Inne wyrażenia nieoznaczone. Wiele innych granic można sprowadzić do rozpatrywanych powyżej przypadków.
$0\cdot\infty$. Na przykład $\lim_{x\to0^+} x\log x$. Sprowadzamy to to wyrażenia ∞/∞.

$$\lim_{x\to0^+} x\log x = \lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0^+}(-x) = 0.$$

$\infty-\infty$. Na przykład

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{ctg} x}{x}\left(x - \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\right) = \lim_{x\to0} \frac{x-\operatorname{tg} x}{x\operatorname{tg} x}\\
&= \lim_{x\to0} \frac{1-1/\cos^2 x}{\operatorname{tg} x + x/\cos^2 x} = \lim_{x\to0} \frac{\cos^2 x - 1}{\sin x\cos x + x}\\
&= \lim_{x\to0} \frac{-\sin^2 x}{(1/2)\sin 2x + x} = \lim_{x\to0} \frac{-2\sin x\cos x}{\cos 2x + 1}\\
&= \frac{0}{2} = 0,
\end{aligned}$$

gdzie reguła de l'Hospitala została zastosowana dwukrotnie.
1^∞. Na przykład

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Rozważmy funkcję

$$\varphi(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) &= \lim_{x\to+\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+1/x)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/(1+1/x)(-1/x^2)}{-1/x^2}\\
&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+1/x} = 1.
\end{aligned}$$