Wykład z analizy

TYDZIEŃ 3.

LICZBY RZECZYWISTE

3.1. Nie istnieje liczba wymierna a taka, że $a^2 = 2$.

3.2. **Dodatnią liczbą rzeczywistą** nazywamy nieskończone rozwinięcie dziesiętne

$$a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3.... \quad \text{gdzie} \quad a \text{ jest nieujemną liczbą całkowitą} \quad \alpha_1, \alpha_2, ... \in \{0, 1, 2, ..., 9\}.$$

Dodatnie liczby wymierne identyfikujemy z pewnymi liczbami rzeczywistymi poprzez ich nieskończone rozwinięcia dziesiętne (dla liczb wymiernych są one okresowe od pewnego miejsca). Niech $x = a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...$, $y = b, \beta_1\beta_2\beta_3...$ piszemy $x = y$ jeśli $a = b$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 = \beta_3$ itd. Piszemy $x < y$ jeśli

$$\begin{aligned} & a > b \\ & \text{lub } a = b \ i \ \alpha_1 > \beta_1 \\ & \text{lub } a = b \ i \ \alpha_1 = \beta_1 \ i \ \alpha_2 > \beta_2 \\ & \text{lub } a = b \ i \ \alpha_1 = \beta_1 \ i \ \alpha_2 = \beta_2 \ i \ \alpha_3 > \beta_3 \\ & \text{itd.} \end{aligned}$$

3.3. Dla liczby rzeczywistej $x = a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...$ liczba wymierna $a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_k.$ jest przybliżeniem dziesiętnym liczby x. Widzimy, że

$$a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_k. < x \leq a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_k. + 10^{-k}.$$

3.4. Definiujemy ujemne liczby rzeczywiste jako $-a, \alpha_1\alpha_2...$ i, tak jak dla liczb wymiernych, $-a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3... < -b, \beta_1\beta_2\beta_3...$ jeśli $a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3... > b, \beta_1\beta_2\beta_3....$ Do wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich i ujemnych dołączamy jeszcze liczbę wymierną 0. Liczby rzeczywiste, które nie są wymierne, tzn. nie mają rozwinięcia okresowego od pewnego miejsca, nazywamy **liczbami niewymiernymi**. Na przykład liczba $1, 110100100010000....$ jest liczbą niewymierną.

3.5. DEFINIUJEMY dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych tak, że dla liczb wymiernych zgadzają się one z dodawaniem i mnożeniem liczb wymiernych. Definicja ta jest taka, że wszystkie postulaty **1. - 17.** są spełnione.

3.6. Liczbom rzeczywistym przyporządkowujemy punkty na prostej: najpierw wybieramy punkt 0 i 1. W sposób opisany poprzednio przyporządkowujemy każdej liczbie wymiernej dodatniej $x = \frac{p}{q}$ punkt na prostej odkładając najpierw p odcinków $[0, 1]$, od punktu 0 na prawo, a potem przy pomocy twierdzenia Talesa dzieląc otrzymany odcinek na q równych części. Jeśli liczba wymierna x jest przedstawiona przy pomocy nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego $x = a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...$, to istnieje procedura, która pozwala nam narysować odpowiadający jej punkt na prostej *niedokładnie*, ale z dowolnie dobrym przybliżeniem. Najpierw wybieramy punkt o współrzędnej całkowitej a, gdzie a jest największą, nieujemną liczbą całkowitą *mniejszą* niż x. Potem odcinek $[a, a+1]$ dzielimy na 10 równych części i wybieramy punkt $a + \frac{\alpha_1}{10}$ taki, który jest lewym końcem odcinka, w którym leży liczba x: liczba x należy do odcinka $[a + \frac{\alpha_1}{10}, a + \frac{\alpha_1 + 1}{10}]$. Ten odcinek dalej dzielimy na 10 równych części i wybieramy liczbę $a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2}$ i tak dalej.

Liczby wymierne $a, a + \frac{\alpha_1}{10}, a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2}, a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3}$ itd. są wszystkie *mniejsze* od x, ale przybliżają x (od dołu) z coraz to większą dokładnością:

$$\begin{aligned} x - a &< 1 \\ x - (a + \frac{\alpha_1}{10}) &< 10^{-1} \\ x - (a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2}) &< 10^{-2} \\ x - (a + \frac{\alpha_1}{10}a + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3}) &< 10^{-3} \end{aligned}$$

Podobnie postępujemy jeśli x jest liczbą rzeczywistą $x = a,\alpha_1\alpha_2\alpha_3....$ Nie możemy jej narysować dokładnie na prostej, ale możemy to zrobić z dokładnością tak duża jak chcemy przy pomocy procedury opisanej powyżej.

Twierdzenie 3.7. *Dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej c i każdego naturalnego n istnieje liczba rzeczywista x taka, że*

$$x^n = c \quad \textit{wtedy piszemy} \quad x = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}.$$

3.8. Udowodnimy najpierw, że dla liczb rzeczywistych *dodatnich*

$$x < y \Longrightarrow x^n < y^n \qquad \text{oraz} \qquad x^n < y^n \Longrightarrow x < y. \tag{3.1}$$

Istotnie,

$$0 < x < y \Longrightarrow x^2 < xy < yy = y^2, \quad 0 < x^2 < y^2 \Longrightarrow x^2x < y^2x < y^2y = y^3 \Longrightarrow x^3 < y^3 ... \quad \text{itd.}$$

co dowodzi $0 < x < y \Longrightarrow 0 < x^n < y^n$. Załóżmy teraz, że $0 < x^n < y^n$. Wtedy, jeśli $0 < x < y$ nie zachodzi, to albo $x = y$ i wtedy $x^n = y^n$, wbrew założeniu, albo $x > y$ i wtedy na podstawie przed chwilą udowodnionego wynikania $x^n > y^n$ wbrew założeniu.

3.9. Z (3.1) wynika, że dla danej liczby rzeczywistej dodatniej c jest co najwyżej jedna liczba rzeczywista x taka, że $x^n = c$. Piszemy $\sqrt[n]{c}$. Aby znaleźć liczbę rzeczywistą $\sqrt[n]{c} = a,\alpha_1\alpha_2\alpha_3...$ mamy znaleźć więc liczbę nieujemną całkowitą a i liczby $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \{0, ..., 9\}$ tak aby dla każdego k

$$a,\alpha_1\alpha_2...\alpha_k. < \sqrt[n]{c} \leq a,\alpha_1\alpha_2...\alpha_k. + 10^{-k}.$$

to znaczy

$$(a,\alpha_1\alpha_2...\alpha_k.)^n < c \leq (a,\alpha_1\alpha_2...\alpha_k. + 10^{-k})^n. \tag{3.2}$$

Stosujemy następującą procedurę:

Liczba a jest największą nieujemną liczbą całkowitą taką, że

$$a^n < c,$$

liczba α_1 jest największą z liczb $0, 1, ..., 9$ taką, że

$$(a + \frac{\alpha_1}{10})^n < c,$$

liczba α_2 jest największą z liczb $0, 1, ..., 9$ taką, że

$$(a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2})^n < c,$$

liczba α_3 jest największą z liczb $0, 1, ..., 9$ taką, że

$$(a + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3})^n < c$$

i tak dalej. Mamy, z (3.2), dla każdego k

$$(a,\alpha_1\alpha_2...\alpha_k.)^n < c \leq (a,\alpha_1\alpha_2...\alpha_k. + 10^{-k})^n.$$

W ten sposób otrzymujemy liczbę rzeczywistą $x = a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...$ tzn. taką, że

$$a, \alpha_1\alpha_2...\alpha_k. < x \leq a, \alpha_1\alpha_2...\alpha_k. + 10^{-k},$$

skąd

$$(a, \alpha_1\alpha_2...\alpha_k.)^n < x^n \leq (a, \alpha_1\alpha_2...\alpha_k. + 10^{-k})^n.$$

Wobec (3.2) widzimy, że dla każdego k

$$|x^n - c| < (a, \alpha_1\alpha_2...\alpha_k. + 10^{-k})^n - (a, \alpha_1\alpha_2...\alpha_k.)^n = L_k.$$

Aby obliczyć L_k skorzystamy ze wzoru 1.11.

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + ... + B^{n-1}),$$

podstawiając

$$A = a, \alpha_1\alpha_2...\alpha_k. + 10^{-k} \quad B = a, \alpha_1\alpha_2...\alpha_k.$$

Ale $A \leq a + 1$ i $B \leq a + 1$, więc

$$L_k = A^n - B^n \leq 10^{-k}(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + ... + B^{n-1}) \leq 10^{-k}n(a + 1)^n,$$

skąd wynika, że

$$\frac{|x^n - c|}{n(a + 1)^n} \leq 10^{-k} \quad \text{dla każdego} \quad k$$

czyli

$$\frac{|x^n - c|}{n(a + 1)^n} = 0 \quad \text{więc} \quad |x^n - c| = 0 \quad \text{skąd wynika, że} \quad x^n = c.$$

3.10. Obliczmy pierwszych parę cyfr $\sqrt[3]{2}$.

$$\begin{aligned}
a = 1 &\quad \text{bo} \quad 1^3 < 2 \quad \text{oraz} \quad 2^3 > 2 \\
\alpha_1 = 2 &\quad \text{bo} \quad 1.2^3 < 2 \quad \text{oraz} \quad (1.3)^3 > 2 \\
\alpha_3 = 5 &\quad \text{bo} \quad 1.25^3 < 2 \quad \text{oraz} \quad (1.26)^3 > 2 \\
\alpha_4 = 9 &\quad \text{bo} \quad 1.259^3 < 2 \quad (\text{oraz} \quad 1.26^3 > 2).
\end{aligned}$$

3.11. Dla dowolnej liczby wymiernej a i liczby rzeczywistej dodatniej c określamy c^a. Dla liczby dodatniej $a = \frac{p}{q}$ piszemy

$$c^a = c^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{c^p} = (\sqrt[q]{c})^p$$

a dla liczby ujemnej a piszemy

$$c^a = \frac{1}{c^{-a}}.$$