Wykład z analizy

Tydzień 4.

Funkcje

4.1. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych będziemy oznaczać przez $\mathbf{R}$. *Odcinkiem domkniętym* nazywamy zbiór $[a,b]=\{x\in\mathbf{R}: a\le x\le b\}$.*Odcinkiem domkniętym z lewej strony* nazywamy zbiór $[a,b)=\{x\in\mathbf{R}: a\le x<b\}$. *Odcinkiem domkniętym z prawej strony* nazywamy zbiór $(a,b]=\{x\in\mathbf{R}: a<x\le b\}$. *Odcinkiem otwartym* nazywamy zbiór $(a,b)=\{x\in\mathbf{R}: a<x<b\}$. Piszemy również $(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}: x>a\}$, $[a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}: x\ge a\}$, $(-\infty,a)=\{x\in\mathbf{R}: x<a\}$, $(-\infty,a]=\{x\in\mathbf{R}: x\le a\}$.

4.2. Niech $M\subset\mathbf{R}$ będzie podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych. *Funkcją* f określoną na M o wartościach rzeczywistych nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi zbioru M liczby rzeczywistej. Zbiór M nazywamy *dziedziną* funkcji f. Piszemy

$$M\ni x\to f(x)\in\mathbf{R}.$$

Przykłady:
(1) $M=[0,1]$, $\quad f(x)=\sqrt{x}$.
(2) $M=[0,2)\cup\{2\}\cup(3,4)$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{gdy } x\in[0,2)\\ 4 & \text{gdy } x=2\\ x+1 & \text{gdy } x\in[3,4)\end{cases}$$

(3) $M=\mathbf{R}$, $\quad f(x)=\begin{cases} 0 & \text{gdy x jest wymierna}\\ 1 & \text{gdy x jest niewymierna.}\end{cases}$
(4) $M=\mathbf{R}$, $\quad f(x)=1$.

4.3. Często piszemy $y=f(x)$. Np. $y=\frac{2x+1}{x^2+1}$. Nie zawsze w definicji funkcji jest jawnie podawana jej dziedzina. Jeśli funkcja jest określona wzorem, np. $f(x)=\sqrt{x+1}$, dziedziną funkcji jest maksymalny podzbiór $\mathbf{R}$, dla którego wzór ma sens. W tym przykładzie jest to zbiór $\{x\in\mathbf{R}: x\ge -1\}$.

4.4. Niech f,g będą dwoma funkcjami określonymi na zbiorze M. Określamy

$$\begin{aligned} f+g :& M\ni x\to f(x)+g(x)\\ f-g :& M\ni x\to f(x)-g(x)\\ fg :& M\ni x\to f(x)g(x)\\ \frac{f}{g} :& \{x\in M: g(x)\ne 0\}\ni x\to\frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

Dziedziną funkcji $\frac{f}{g}$ jest $\{x\in M: g(x)\ne 0\}$.

4.5. Niech f,g będą dwoma funkcjami określonymi na zbiorach M i N odpowiednio. Załóżmy, że $f(M)=\{f(x): x\in M\}\subset N$. Określamy funkcję złożoną

$$g\circ f: M\ni x\to g(f(x)).$$

Przykład: Niech $g(y)=2y^2+3$, $f(x)=\sqrt{x-1}$. Wtedy

$$g\circ f(x)=2(\sqrt{x-1})^2+3=2x+1 \quad \text{dla} \quad x\ge 1.$$

4.6. *Tablicą funkcji* jest zestawienie wartości funkcji dla różnych wybranych wartości zmiennej x. Przykład 1: dla funkcji $x \to x^2 = y$ tablicą będzie np.:

$$\begin{pmatrix} x & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ y & 0,01 & 0,04 & 0,09 & 0,16 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Przykład 2: dla funkcji $x \to \begin{cases} x+1 & \text{gdy } x < 0 \\ x^2 & \text{gdy } 0 \leq x << 1 \\ \frac{2}{x} & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$ tablicą będzie np.:

$$\begin{pmatrix} x & -2 & -1 & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 & 0,5 & 2 & 3 & 4 \\ y & -1 & 0 & 0 & 0,01 & 0,04 & 0,09 & 0,16 & 0,25 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2}. \end{pmatrix}$$

4.7. Wykresem funkcji $x \to f(x) = y$ o dziedzinie M nazywamy zbiór punktów płaszczyzny

$$\{(x,y) : x \in M, y = f(x)\}.$$

Zauważmy, że proste pionowe przecinające oś x-ów w punktach $x \in M$ przecinają wykres funkcji dokładnie w jednym punkcie. Także każdy podzbiór W płaszczyzny mający własność, że dla pewnego zbioru $M \subset \mathbf{R}$ że proste pionowe przecinające oś x-ów w punktach $x \in M$ przecinają W w dokładnie w jednym punkcie jest wykresem funkcji f o dziedzinie M takiej, że $f(x) = y$, gdzie y jest rzędną (jedynego!) punktu w którym prosta pionowa przechodząca przez punkt x przecina W.

Pierwiastkiem funkcji f nazywamy liczbę x taką, że $f(x) = 0$. Zbiór pierwiastków funkcji jest zbiorem punktów na osi x-ów będącym przecięciem wykresu funkcji z osią x-ów.

4.8. Funkcja f nazywa się

$$\begin{aligned} \text{rosnąca, jeśli} \quad & x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ \text{malejąca, jeśli} \quad & x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \\ \text{niemalejąca, jeśli} \quad & x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \\ \text{nierosnąca, jeśli} \quad & x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2). \end{aligned}$$

Jeśli funkcja jest rosnąca lub malejąca to mówimy, że jest ściśle monotoniczna. Jeśli funkcja jest niemalejąca lub nierosnąca to mówimy, że jest monotoniczna.

Jeśli dziedzinę funkcji f możemy podzielić, na odcinki w których funkcja jest monotoniczna (lub ściśle monotoniczna), to mówimy, że funkcja jest *kawałkami monotoniczna* (lub *kawałkami ściśle monotoniczna*). Funkcja $x \to x^2$ jest kawałkami ściśle monotoniczna: jest malejąca na odcinku $(-\infty, 0)$ i rosnąca na odcinku $[0, +\infty)$.

4.9. Funkcja f nazywa się *parzysta*, jeśli $f(-x) = f(x)$. Funkcja f nazywa się *nieparzysta*, jeśli $f(-x) = -f(x)$. Funkcja $f(x) = x^4$ jest parzysta, funkcja $f(x) = x^3$ jest nieparzysta. Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi y-ków, wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem punktu (00).

4.10.*Funkcja liniową* nazywamy funkcję określoną na całej prostej postaci

$$x \to mx + b.$$

Wykresem funkcji liniowej jest prosta o współczynniku kierunkowym m. Każda prosta na płaszczyźnie nie równoległa do osi y- ów jest wykresem funkcji liniowej.

4.11. Przykład opisu zjawiska fizyczne przy pomocy funkcji: Samochód stojący rusza z maksymalnym przyspieszeniem a i jedzie z tym przyspieszeniem przez dwie minuty, potem zaczyna hamować z maksymalnym opóźnieniem $-b$ i jedzie tak aż do zatrzymania. Opiszemy funkcję prędkości samochodu zależną od czasu:

$$v(t) = \begin{cases} at & \text{dla } 0 \leq t \leq 2 \\ 2a - b(t-2) & \text{dla } 2 < t \leq t_0, \end{cases}$$

gdzie $t_0 = 2 + \frac{b}{a}$, jest czasem zatrzymania samochodu.

4.12. *Funkcją kwadratową* nazywamy funkcję określoną na całej prostej postaci

$$x \to y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{gdzie} \quad a \neq 0.$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o osi równoległej do osi y-ów.

Mamy

$$f(x) = a\big[\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\big], \quad \text{lub} \quad f(x) = a\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{D}{4a}, \quad \text{gdzie} \quad D = b^2 - 4ac.$$

Załóżmy, że $a > 0$. Wtedy najmniejsza wartość jaką przyjmuje funkcja kwadratowa jest $y = f(\frac{-b}{2a})$. To znaczy punkt $\big(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\big)$ jest wierzchołkiem paraboli.

Jeśli $D < 0$ to funkcja kwadratowa nie ma pierwiastków, cały jej wykres jest ponad osią x-ów. Jeśli $D = 0$, wtedy wierzchołek paraboli leży na osi x-ów oraz funkcja może być zapisana w postaci

$$f(x) = a(x-r)^2 \quad \text{gdzie} \quad r = -\frac{b}{2a}.$$

W tym przypadku funkcja f jest złożeniem funkcji liniowej $y = \sqrt{a}(x-r)$ oraz funkcji $y \to y^2$.

Jeśli $D > 0$, to parabola przecina oś x-ów w dwóch punktach $x = r_1$ i $x = r_2$, gdzie

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Funkcja f ma dwa pierwiastki r_1, r_2 i może być przedstawiona jako iloczyn dwóch funkcji liniowych:

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2).$$