5. Wielomiany, funkcje wymierne, funkcja potęgowa

5.1. *Wielomianem* nazywamy funkcję określoną na całej prostej rzeczywistej postaci

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

gdzie n jest nieujemną liczbą całkowitą, którą nazywamy *stopniem wielomianu* liczby $a_0, a_1, ..., a_n$ nazywamy *współczynnikami* wielomianu, przy czym $a_n \neq 0$. Wielomianami stopnia zero są stałe, stopnia jeden funkcje liniowe, stopnia dwa funkcje kwadratowe.

5.2.

Twierdzenie. *Jeśli f i g są wielomianami, to $f+g$, $f \cdot g$ oraz $f \circ g$ są wielomianami.*

Dowód. Niech $n \geq m$ i niech

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \quad g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0.$$

Wtedy

$$(f+g)(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + (a_m + b_m)x^m + \cdots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0,$$

$$\begin{aligned} f \cdot g(x) = &\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)\left(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0\right) \\ =&a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1}b_m)x^{n+m-1} + (a_n b_{m-2} + a_{n-1}b_{m-1} + a_{n-2}b_m)x^{n+m-2} + \cdots + (a_1 b_0 + b_1 a_0)x + a \end{aligned}$$

Ponieważ

$$g(x)^k = (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m)(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m)...(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m),$$

więc $g(x)^k$ jest wielomianem dla każdego naturalnego k. Wynika stąd, że

$$f \circ g(x) = a_0 g(x)^n + a_1 g(x)^{n-1} + ... + a_{n-1}g(x) + a_n$$

jest wielomianem. $\square$

5.3.

Twierdzenie. *Niech f i g będą wielomianami stopnia n i m, odpowiednio, oraz niech $n \geq m$. Wtedy istnieją wielomiany Q i R, przy czym stopień wielomianu R jest* **mniejszy** *niż stopień wielomianu g takie, że*

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x).$$

Wielomian Q nazywamy ilorazem, a wielomian R resztą przy dzieleniu f przez g.

Przykład: $f(x) = 4x^4 - 3x + 15$, $g(x) = 2x^2 + 2x + 5$.

$$\begin{array}{rrrrrl} 4x^4 & +0x^3 & +0x^2 & -3x & +15 & = (2x^2+2x+5)(2x^2-2x-3) + 13x + 30 \\ 4x^4 & +4x^3 & +10x^2 & & & \\ & -4x^3 & -10x^2 & -3x & +15 & \\ & -4x^3 & -4x^2 & -10x & & \\ & & -6x^2 & +7x & +15 & \\ & & -6x^2 & -6x & -15 & \\ & & & 13x & +30 & \end{array}$$

Tak więc $Q(x) = 2x^2 - 2x - 3$, $R(x) = 13x + 30$.

5.4.

Twierdzenie. *Jeśli f jest wielomianem stopnia $n > 1$ a $g(x) = x - r$, to reszta przy dzieleniu f przez g jest stała równą $f(r)$.*

Dowód. Mamy

$$f(x) = (x - r)Q(x) + R,$$

gdzie R jest wielomianem stopnia zero, więc jest stałą. Podstawiając $x = r$ otrzymujemy

$$f(r) = 0 \cdot Q(x) + R = R.$$

W szczególności, jeśli r_1 jest pierwiastkiem wielomianu f, tzn. $f(r_1) = 0$, mamy $f(x) = (x - r_1)Q_1(x)$. Jeśli r_2 jest pierwiastkiem Q, to $Q(x) = (x - r_2)Q_2(x)$ i $f(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x)$. Znajdując po kolei pierwiastki kolejnych ilorazów otrzymujemy

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)...(x - r_k)Q_k(x).$$

Ponieważ stopienie wielomianów $Q_1, Q_2, ...$ maleją, widzimy, że wielomian f stopnia n może mieć co najwyżej n pierwiastków. Pierwiastki $r_1, r_2, ..., r_k$ nie muszą być różne. Jeśli f dzieli się przez $(x - r)^k$, wtedy mówimy, że r jest k- krotnym pierwiastkiem.

5.5. Przykład. Niech

$$f(x) = 2x^8 - 10x^7 + 8x^6 + 8x^5 + 6x^4 + 18x^3.$$

Widzimy, że 0 jest trzykrotnym pierwiastkiem f:

$$f(x) = (x - 0)^3 2(x^5 - 5x^4 + 4x^2 + 3x + 9).$$

Sprawdzamy, że -1 jest pierwiastkiem $x^5 - 5x^4 + 4x^2 + 3x + 9$. Dzielimy przez $x + 1$ i otrzymujemy $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$. Dalej 3 jest pierwiastkiem $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$, który, jak sprawdzamy, jest pierwiastkiem dwukrotnym. Wykonawszy dzielenie otrzymujemy wielomian $x^2 + 1$, który nie ma pierwiastków. Tak więc

$$f(x) = 2x^3(x + 1)(x - 3)^2(x^2 + 1).$$

5.6. Funkcja ϕ nazywa się *funkcją wymierną* jeśli ϕ jest postaci

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{gdzie } f, g \text{ są wielomianami.}$$

Oczywiście zakładamy, że g nie jest wielomianem stałym równym zero. Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych bez pierwiastków wielomianu g, których jest co najwyżej tyle ile stopień g.

Twierdzenie. *Niech ϕ i ψ będą funkcjami wymiernymi. Wtedy $\phi + \psi$, $\phi\psi$, $\phi \circ \psi$ są funkcjami wymiernymi. Jeśli ψ nie jest identycznościowo równa zero, to funkcja $\frac{\phi}{\psi}$ też jest funkcją wymierną.*

5.7. Niech r będzie liczbą wymierną. Funkcję

$$\mathbf{R}^+ \ni x \to x^r \mathbf{R}^+$$

nazywamy *funkcją potęgową*. Przy odpowiednim ograniczeniu dziedzin funkcje wymierne, wielomiany i funkcje potęgowe można składać.

Przykład: Niech $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \sqrt{x}$. Wtedy

$$f \circ g \circ h(x) = \frac{1}{|x|} + 2.$$

5.8. Niech $\phi = \frac{f}{g}$ będzie funkcją wymierną. Funkcja ϕ jest określona wszędzie poza pierwiastkami wielomianu g. Może się zdarzyć, że dziedzinę funkcji ϕ można rozszerzyć na niektóre pierwiastki g. Np.

$$\phi(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Funkcja ϕ nie jest określona w punkcie $x = 1$. Jednakże 1 jest też pierwiastkiem licznika, więc

$$\phi(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1, \quad \text{dla} \quad x \neq 1,$$

wobec tego możemy rozszerzyć funkcję ϕ kładąc $\phi(1) = 2$. Widać, że wykresie funkcji ϕ uzupełnienie wartości funkcji w punkcie 1 jest "naturalne". Wykres funkcji uzupełniamy jednym punktem, który leż na prostej $y = x + 1$. Zazwyczaj nie wszystkie pierwiastki g są pierwiastkami f. Np.

$$\phi(x) = \frac{x^3 - 2x + x}{x^2 - 1}.$$

Pierwiastek mianownika 1 jest też pierwiastkiem licznika, po skróceniu dostajemy

$$\phi(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}$$

i możemy określić funkcję ϕ w punkcie 1: $\phi(1) = 0$. Nie możemy tego zrobić dla drugiego pierwiastka mianownika bo nie jest on pierwiastkiem licznika. Co więcej, gdy zbliżamy się z wartościami x do -1, to licznik zbliża się do 2, a mianownik do 0, więc $|\phi(x)|$ "dąży" do nieskończoności. Zauważmy, że jeśli podstawiamy w $\phi(x)$ wartości mniejsze od -1, to mianownik jest ujemny, licznik też jest ujemny i ułamek jest dodatni i coraz większy przy zbliżaniu się z x do -1. Jeśli podstawiamy wartości większe od -1 i bliskie -1 to mianownik jest dodatni, a licznik ujemny i ułamek dąży do $-\infty$.

5.9. Mówimy, że funkcja ϕ ma granicę równą y_0 w punkcie x_0, niezależnie od tego czy ϕ jest określona w punkcie x_0 czy nie, jeśli

(1) $x_0 \in (a, b)$ dla pewnego (być może małego) przedziału (a, b) należącego do dziedziny funkcji ϕ
(2) wartości $\phi(x)$ zbliżają się do wartości y_0 gdy x zbliża się do x_0.

Wtedy piszemy

$$\lim_{x \to x_0} \phi(x) = y_0$$

5.10.

Definicja. *Funkcja f nazywa się ciągła w punkcie x_0, jeśli jest określona w przedziale (a, b) zawierającym punkt x_0 oraz jeśli*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Mówiąc obrazowo, funkcja jest ciągła w punkcie x_0 jeśli w tym punkcie wykres funkcji nie ma ma przerwy.

Przykłady:
Funkcje f i g są ciągłe w każdym punkcie, funkcja h nie jest ciągła w punkcie 0.

$$f(x) = x - x^2 \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{dla } x > 1 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < 0 \\ 2 - x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$