Wykład z analizy

TYDZIEŃ 6.

FUNKCJE CIĄGŁE

6.1. Ścisła definicja ciągłości funkcji w punkcie. Niech f będzie funkcją określoną w przedziale (a,b) i niech $x_0 \in (a,b)$. Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 jeśli ma jednocześnie następujące dwie własności:

(1) Dla każdej liczby A **większej od** $f(x_0)$, (czyli $A > f(x_0)$) istnieje podprzedział $(a', b') \subset (a,b)$, ze środkiem w x_0, taki, że $A > f(x)$ dla każdego $x \in (a', b')$,

(2) Dla każdej liczby B **mniejszej od** $f(x_0)$, (czyli $B < f(x_0)$ istnieje podprzedział $(a", b") \subset (a,b)$ ze środkiem w x_0 taki, że $B < f(x)$ dla każdego $x \in (a", b")$.

Funkcja jest ciągła w punkcie x_0 jeśli jej wykres nad przedziałem (a,b) nie ma przerwy w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Funkcja jest ciągła na zbiorze $M \subset \mathbf{R}$, jeśli jest ciągła w każdym punkcie należącym do zbioru M.

6.2. Mówimy, że punkt x jest blisko punktu x_0 jeśli dla małego przedziału $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ x należy do $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.

Funkcja jest ciągła w punkcie x_0 jeśli wartości funkcji w punktach bliskich x_0 leżą blisko wartości $f(x_0)$.

Przykłady

(a) *Funkcja $f : x \to x^2 - 1$ jest dodatnia blisko zera.* Istotnie, dla $x \in (-1, 1)$ mamy $f(x) > 0$.

(b) *Funkcja $f : x \to 10^{10}x^2 - 1$ jest ujemna blisko zera.* Istotnie, dla $x \in (-\frac{1}{10^5}, \frac{1}{10^5})$ mamy $f(x) < 0$.

(c) *Jeśli $f(x) > a$ blisko punktu x_0 oraz $g(x) > b$ blisko punktu x_0, to $f(x)+g(x) > a+b$ blisko punktu x_0.* Istotnie, założenie o f mówi, że istnieje $\delta_1 > 0$ takie, że $f(x) > a$ dla $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Założenie o g mówi, że istnieje $\delta_2 > 0$ takie, że $g(x) > b$ dla $x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$. Stąd $f(x) + g(x) > a + b$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, gdzie δ jest mniejszą z liczb δ_1, δ_2.

(d) *Niech $f : x \to c$, gdzie c jest stała. f jest funkcją ciągłą w każdym punkcie.* Jeśli $f(x_0) > B$, to $c > B$, więc $f(x) > B$ dla każdego x.

(e) *Funkcja $f(x) = x$ jest ciągła w każdym punkcie x_0.* Istotnie, jeśli $f(x_0) > B$ (to znaczy $x_0 > B$), to dla $\delta = x_0 - B$ i $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mamy $f(x) = x > B$.

(f) *Funkcja $x \to \frac{1}{x}$ jest ciągła w każdym punkcie poza punktem* 0. Istotnie, niech dla ustalenia uwagi $x_0 > 0$, i niech $A > \frac{1}{x_0}$. To znaczy, że $\frac{1}{A} < x_0$. Mamy znaleźć przedział, ze środkiem w x_0, taki, że ten sam warunek, $\frac{1}{A} < x$ zachodzi dla wszystkich x z tego przedziału. Ale to jest proste: weźmy jako ten przedział wszystkie x, których odległość od x_0 jest mniejsza niż odległość $1/A$ od x_0. Innymi słowy, niech $\delta = x_0 - 1/A$, i jako wymagany przedział weźmy $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Analogiczne rozumowanie przeprowadzamy dla warunku $B < \frac{1}{x_0}$. W tym wypadku za δ można przyjąć mniejszą z liczb x_0 i $1/B - x_0$, a dodatkowe ograniczenie na δ wynika stąd, że szukany przedział nie może zawierać 0.

Przypadek punktu $x_0 < 0$ można rozpatrzyć tak samo.

(g) *Funkcja* $f(x) = \begin{cases} 1 & dla\ x \geqslant 0 \\ 0 & dla\ x < 0 \end{cases}$ *nie jest ciągła w punkcie* 0. Istotnie, dla $B = \frac{1}{2}$ mamy $f(x_0) > \frac{1}{2}$. Jednak dla żadnego przedziału otwartego zawierającego zero nie może być $f(x) > \frac{1}{2}$ dla wszystkich x z tego przedziału, bo dla ujemnych x $f(x) = 0$.

6.3. Warunki (1) i (2) w definicji można zastąpić jednym warunkiem:

Definicja „$\epsilon - \delta$". Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 należącym do przedziału zawartego w dziedzinie f jeśli dla każdego **dodatniego** ϵ istnieje **dodatnie** δ takie, że dla x spełniających warunek $|x - x_0| < \delta$ mamy $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Istotnie, dla każdego $\epsilon > 0$ mamy $f(x_0) - \epsilon < f(x_0) < f(x_0) + \epsilon$. Jeśli f jest ciągła w punkcie x_0, to z pierwszej nierówności (i warunku (2) definicji ciągłości) wynika, że dla x blisko punktu x_0 $f(x_0) - \epsilon < f(x)$, a z drugiej (i warunku (1) definicji), że dla x blisko punktu x_0 $f(x) < f(x_0) + \epsilon$, czyli istnieje takie $\delta > 0$, że dla x w odległości mniejszej niż δ od x_0 (czyli dla $|x - x_0| < \delta$) mamy $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. To pokazuje, że jeżeli f jest ciągła w punkcie x_0, to spełniony jest warunek w definicji „$\epsilon - \delta$" (definicji *epsilonowo-deltowej*). Można też prosto pokazać, że obie definicje są sobie całkowicie równoważne.

6.4. Twierdzenie. *Niech f i g będą dwoma funkcjami ciągłymi w punkcie x_0. Wtedy funkcje $f + g$, $f - g$ i $f \cdot g$ są ciągłe w punkcie x_0. Ponadto, jeśli $g(x_0) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ też jest ciągła w punkcie x_0.*

Dowód. Dla przykładu udowodnimy ciągłość $f \cdot g$. Weźmy dowolne $\epsilon > 0$. Dla tego ϵ mamy **znaleźć** $\delta > 0$ takie, że warunek

$$|x - x_0| < \delta$$

pociąga

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| < \epsilon.$$

Ponieważ f jest ciągła w x_0 istnieje takie δ_0, że dla x spełniających warunek $|x - x_0| < \delta_0$ mamy

$$|f(x)| < 1 + |f(x_0)|.$$

Dla takich x mamy więc

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)| \\ &\leqslant |f(x)||g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)| \\ &\leqslant (1 + |f(x_0)|)|g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)| \end{aligned} \tag{1}$$

Niech teraz $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ będą takie, że

$$|x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{1 + |f(x_0)|} \tag{2}$$

$$|x - x_0| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{|g(x_0)|} \tag{3}$$

Innymi słowy, δ_1 została dobrana, na mocy definicji „$\epsilon - \delta$" ciągłości funkcji g w punkcji x_0, do liczby $\epsilon' = \epsilon/(2(1 + |f(x_0)|))$, i podobnie została dobrana δ_2. Biorąc δ najmniejszą spośród $\delta_0, \delta_1 \delta_2$, dla $|x - x_0| < \delta$ zachodzą (1),(2) i (3), skąd

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{1 + |f(x_0)|} \cdot (1 + |f(x_0)|) + \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{|g(x_0)|} \cdot |g(x_0)| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

6.5. Z przykładów (d) i (e) oraz twierdzenia 6.4. wynika, że wielomian jest funkcją ciągłą w każdym punkcie. Z twierdzenia 6.4. wynika, że funkcja wymierna jest ciągła w każdym punkcie swej dziedziny.

6.6. Twierdzenie. *Niech f będzie funkcją ciągłą w każdym punkcie odcinka $[a, b]$. Wtedy dla każdego γ z przedziału o końcach $f(a)$ i $f(b)$ istnieje punkt $x \in [a, b]$ taki, że $f(x) = \gamma$.*

Innymi słowy, funkcja ciągła na odcinku przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między dowolnymi dwoma swymi wartościami.

Geometrycznie twierdzenie to jest oczywiste: ponieważ wykres funkcji jest krzywą ciągłą, łączącą punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, więc dla γ pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ prosta pozioma na wysokości γ musi przecinać wykres funkcji, to znaczy dla pewnego $x \in [a, b]$ punkt (x, γ) leży na wykresie funkcji (czyli $f(x) = \gamma$).

Wniosek 1. *Jeśli funkcja ciągła na prostej przyjmuje wartości dodatnie i ujemne, to ma pierwiastek.*

W szczególności,

Wniosek 2. *Każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek rzeczywisty.*

Dowód. Niech
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad n \text{ nieparzyste.}$$
Wtedy dla $x \neq 0$
$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right).$$
Jeżeli $|x|$ jest wystarczająco duże, to
$$\left|\frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right| < \frac{1}{2}.$$
Więc, dla $|x|$ wystarczająco dużego
$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} > \frac{1}{2},$$
skąd wynika, że dla dużych $|x|$ $f(x)$ ma ten sam znak, co $a_n x^n$. Dlatego jeśli $a_n > 0$, to dla x ujemnych o dużej wartości bezwzględnej $f(x)$ jest ujemne i dla dużych x jest dodatnie. Dla $a_n < 0$ jest na odwrót: dla dużych $|x|$ $f(x)$ jest dodatnie dla ujemnych x i ujemne dla dodatnich x. □

6.7. Twierdzenie. *Niech f będzie funkcją określoną na odcinku (a, b) o wartościach w odcinku (c, d) a g funkcją określoną na odcinku (c, d). Jeśli f jest ciągła w punkcie $x_0 \in (a, b)$, a g jest ciągła w punkcie $f(x_0) \in (c, d)$, to funkcja $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0.*

Dowód. Niech $\epsilon > 0$. Ponieważ funkcja g jest ciągła w punkcie $f(x_0)$ możemy dobrać $\delta_1 > 0$ takie, że
$$|y - f(x_0)| < \delta_1 \Longrightarrow |g(y) - g(f(x_0))| < \epsilon. \tag{4}$$
Teraz, ponieważ f jest ciągła w punkcie x_0 dobieramy $\delta > 0$ takie, że
$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta_1,$$
skąd wobec (4) mamy
$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon.$$
□

6.8. Niech f będzie funkcją rosnącą i ciągłą na odcinku $[a, b]$, $a < b$. Wtedy zbiór wartości funkcji f jest odcinkiem $[f(a), f(b)]$. Istotnie, ponieważ funkcja jest rosnąca $f(a) < f(b)$, przy czym są to wartości skrajne. Z kolei ponieważ jest ciągła, przyjmuje wszystkie wartości pośrednie z odcinka $[f(a), f(b)]$. Określamy *funkcję odwrotną* do funkcji f jako funkcję g na odcinku $[f(a), f(b)]$ taką, że
$$g(f(x)) = x \quad \text{dla wszystkich} \quad a \leq x \leq b.$$
Wtedy również
$$f(g(y)) = y \quad \text{dla wszystkich} \quad f(a) \leq y \leq f(b).$$
Ponieważ **różnym wartościom x odpowiadają różne wartości** $f(x)$ funkcja g jest dobrze określona.

Podobnie określamy funkcję odwrotną dla funkcji malejącej. Wtedy funkcja odwrotna jest określona na odcinku $[f(b), f(a)]$

Funkcja odwrotna do funkcji rosnącej jest rosnąca, funkcja odwrotna do funkcji malejącej jest malejąca.

Wykres funkcji odwrotnej do funkcji f (rosnącej lub malejącej) jest odbiciem wykresu funkcji f względem prostej $y = x$. Można stąd wywnioskować, że **funkcja odwrotna do funkcji ciągłej jest ciągła.**

6.9. Z ciągłości funkcji odwrotnej wynika

Twierdzenie. *Dla każdej liczby całkowitej k funkcja $x \to x^{\frac{1}{k}}$ jest funkcją ciągłą.*

Istotnie, funkcja $f : \mathbf{R}^+ \ni x \to x^{\frac{1}{k}} \in \mathbf{R}^+$ jest jest funkcją odwrotną do funkcji rosnącej $y \to y^k$, a funkcja $y \to y^k$ jest ciągła. ($\mathbf{R}^+$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.)

Z twierdzenia o ciągłości złożenia funkcji ciągłych wynika, że dla każdej liczby wymiernej $r = \frac{p}{q}$ funkcja $\mathbf{R}^+ \in x \to x^r \in \mathbf{R}^+$ jest ciągła.