Wykład z analizy

Tydzień 7.

Granica funkcji w punkcie

7.0. Z twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej wynika następujące

Twierdzenie. *Dla każdej liczby całkowitej $k \neq 0$ funkcja $x \to x^{\frac{1}{k}}$ jest funkcją ciągłą.*

Istotnie, funkcja $f : \mathbf{R}^+ \ni x \to x^{\frac{1}{k}} \in \mathbf{R}^+$ jest funkcją odwrotną do funkcji $y \to y^k$ (rosnącej dla $k > 0$ i malejącej dla $k < 0$), a funkcja $y \to y^k$ jest ciągła.

Z twierdzenia o ciągłości złożenia funkcji ciągłych wynika, że dla każdej liczby wymiernej $r = \frac{p}{q}$ funkcja $\mathbf{R}^+ \ni x \to x^r = (x^{\frac{1}{q}})^p \in \mathbf{R}^+$ jest ciągła.

7.1. *Mówimy, że funkcja f jest określona* **w otoczeniu punktu** x_0 *lub* **blisko punktu** x_0 *jeśli dla pewnego przedziału (a, b) takiego, że $x_0 \in (a, b)$ $f(x)$ jest określone dla $x \in (a, b)$ za wyjątkiem, być może punktu x_0.*

Definicja granicy funkcji. Niech f będzie funkcją określoną dla wszystkich punktów odcinka (a, b) za wyjątkiem, być może, punktu $x_0 \in (a, b)$. Mówimy, że funkcja f ma granicę α w punkcie x_0 i piszemy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$$

jeśli wartości funkcji $f(x)$ są blisko wartości α dla x bliskich x_0.

Jeśli wartości funkcji $f(x)$ dla x blisko punktu x_0 nie skupiają się wokół żadnej liczby, to mówimy, że *funkcja f nie ma granicy w punkcie x_0, lub że $\lim_{x \to x_0} f(x)$ nie istnieje.*

Jeśli funkcja f jest określona w punkcie x_0, to $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ wtedy i tylko wtedy gdy funkcja f jest ciągła w punkcie x_0.

Jeśli f nie jest określona w punkcie x_0 oraz $\lim_{x \to x_0} f(x)$ istnieje, to jeśli określimy funkcję f w punkcie x_0 *kładąc* $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$, to tak otrzymana funkcja jest ciągła w punkcie x_0.

7.2. Definicja $\epsilon - \delta$ granicy funkcji. Niech f będzie funkcją określoną dla wszystkich punktów odcinka (a, b) za wyjątkiem, być może, punktu $x_0 \in (a, b)$. Mówimy, że funkcja f ma granicę α w punkcie x_0 i piszemy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$$

jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $x \neq x_0$ i $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$.

7.3. *Funkcja f nie może mieć dwóch różnych granic w punkcie x_0.*

Innymi słowy $f(x)$ nie może być blisko dwóch różnych wartości gdy x jest blisko x_0.

Istotnie, załóżmy, że $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ i $\lim_{x \to x_0} f(x) = \beta$ oraz $\beta > \alpha$. Niech $\epsilon = \frac{\beta - \alpha}{3}$ i niech $\delta > 0$ będzie takie, że dla wszystkich $x \neq x_0$ i $|x - x_0| < \delta$ zachodzi $|f(x) - \alpha| < \frac{\beta - \alpha}{3}$ oraz $|f(x) - \beta| < \frac{\beta - \alpha}{3}$, skąd wynika, że

$$\begin{aligned} 0 &= |(\beta - \alpha) - (f(x) - \beta) - (\alpha - f(x))| \\ &\geqslant \beta - \alpha - |\beta - f(x)| - |\alpha - f(x)| \\ &\geqslant \beta - \alpha - \frac{\beta - \alpha}{3} - \frac{\beta - \alpha}{3} \\ &= \frac{\beta - \alpha}{3}, \end{aligned}$$

co, wobec założenia $\beta > \alpha$, nie jest prawdą.

7.4. Przykłady.

(a) Obliczmy granicę $\lim_{x\to 5} 3x^2 - 30$. Funkcja $x \to 3x^5 - 30$ jest wielomianem, więc jest funkcją ciągłą, więc $\lim_{x\to 5} 3x^2 - 30 = 3 \cdot 5^2 - 30 = 45$.

(b) Obliczmy granicę $\lim_{x\to 0} f(x)$ gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 0, \\ x & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Jak sprawdzaliśmy poprzednio, kładąc $f(0) = 0$ otrzymujemy funkcję ciągłą, więc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(c) Niech

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 0, \\ 2 - x & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Wtedy $\lim_{x\to 0} f(x)$ nie istnieje, bo w każdym przedziale w $(-\delta, \delta)$ są punkty $x < 0$ i dla nich $f(x)$ jest bliskie zero, i punkty $x > 0$, a dla nich $f(x)$ jest bliskie 2. Innymi słowy, funkcja f przyjmuje odległe od siebie wartości w każdym przedziale dookoła punktu 0.

(d) Obliczmy granicę

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}.$$

Zauważmy, że wielomiany $x^2 + x - 6$ i $x^2 - 4$ mają wspólny pierwiastek równy 2, więc dla $x \neq 2$ dzieląc licznik i mianownik przez $x - 2$ otrzymujemy

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{x + 3}{x + 2} = \frac{5}{4}.$$

(e) Obliczmy granicę

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{x^2 + 1}{1 + \sqrt{2x + 8}}.$$

Korzystając z twierdzeń o funkcjach ciągłych, widzimy, że funkcja $x \to \frac{x^2+1}{1+\sqrt{2x+8}}$ jest ciągła w punkcie $\frac{1}{2}$, więc $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{1+\sqrt{2x+8}} = \frac{(\frac{1}{2})^2+1}{1+\sqrt{2\frac{1}{2}+8}}$.

7.5. Twierdzenie. *Niech f i g będą dwoma funkcjami określonymi w otoczeniu punktu x_0. Załóżmy, że granice*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \quad i \quad \lim_{x\to x_0} g(x)$$

istnieją. Wtedy

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} (f+g)(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x), \\ \lim_{x\to x_0} f\cdot g(x) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x), \\ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}, \end{aligned}$$

jeśli $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Twierdzenie to wynika z odpowiedniego twierdzenia o funkcjach ciągłych w punkcie. Istotnie, jeśli określimy

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) \quad \text{i} \quad g(x_0) = \lim_{x\to x_0} g(x),$$

to tak rozszerzone funkcje są ciągłe w punkcie x_0, więc można skorzystać z twierdzenia 6.4. Z powyższego twierdzenia wynika natychmiast, że

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

dla dowolnej stałej c, oraz

$$\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x).$$

7.6. Następujące twierdzenie jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia o złożeniu funkcji ciągłych.

Twierdzenie. *Niech*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \quad \textit{oraz} \quad \lim_{y\to y_0} g(y) = \alpha.$$

Wtedy

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \alpha.$$

7.7. Przykłady.

(a) Dla liczby wymiernej $a > 1$ mamy

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|^a}{x} = 0.$$

Istotnie, mamy pokazać, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$|x-0| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{|x|^a}{x} - 0\right| < \epsilon.$$

Weźmy $\epsilon > 0$. Wtedy $|\frac{|x|^a}{x}| = \frac{|x|^a}{|x|} = |x|^{a-1}$. Więc jeśli $\delta = \epsilon^{\frac{1}{a-1}}$, to $|x| < \delta \Longrightarrow |x|^{a-1} < \delta^{a-1} = \epsilon$.

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\frac{3}{2}}(1-x)}{x(2x+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\frac{3}{2}}}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1-x}{2x+3} = 0\cdot\frac{1}{3} = 0.$$

(c) Aby obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{\frac{27x^3+4x-4}{x^{10}+4x^2+3x}}$$

zauważamy najpierw, że dla $x > \frac{3}{4}$ mamy $\frac{27x^3+4x-4}{x^{10}+4x^2+3x} > 0$ oraz że funkcja $y \to \sqrt[3]{y}$ jest ciągła na $\mathbf{R}^+$ (bo funkcja $x \to x^3$ jest rosnąca, odwzorowuje $\mathbf{R}^+$ na $\mathbf{R}^+$ i jest ciągła). Więc

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{\frac{27x^3+4x-4}{x^{10}+4x^2+3x}} = \sqrt[3]{\frac{\lim_{x\to 1}(27x^3+4x-4)}{\lim_{x\to 1}(x^{10}+4x^2+3x)}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}.$$

7.8. Niech dla $a < x_0$ f będzie funkcją określoną w przedziale (a, x_0). Mówimy, że funkcja f **ma granicę lewostronną** równą α w punkcie x_0 i piszemy

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \alpha$$

jeśli dla x bliskich x_0 i **mniejszych** od x_0 wartości $f(x)$ są bliskie α. Niech dla $x_0 < b$ f będzie funkcją określoną w przedziale (x_0, b). Mówimy, że funkcja f **ma granicę prawostronną** równą α w punkcie x_0 i piszemy

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \alpha$$

jeśli dla x bliskich x_0 i **większych** od x_0 wartości $f(x)$ są bliskie α. Innymi słowy,

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \alpha, \quad \text{jeśli dla każdego } \epsilon > 0 \text{ istnieje takie } \delta > 0, \text{ że } \quad 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon,$$
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \alpha, \quad \text{jeśli dla każdego } \epsilon > 0 \text{ istnieje takie } \delta > 0, \text{ że } \quad 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon.$$

7.9. Mówimy, że funkcja f określona na $[a,b]$ jest ciągła na $[a,b]$, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in (a,b)$ oraz

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

7.10. Mówimy, że funkcja f określona na $[a,+\infty)$ ma granicę α gdy $x \to +\infty$ i piszemy

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha \quad \text{jeśli dla każdego } \epsilon > 0 \text{ istnieje } M \text{ takie, że } x > M \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon.$$

Mówimy, że funkcja f określona na $(-\infty,b]$ ma granicę α gdy $x \to -\infty$ i piszemy

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha \quad \text{jeśli dla każdego } \epsilon > 0 \text{ istnieje } M \text{ takie, że } x < M \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon.$$

Twierdzenie 7.5 pozostaje prawdziwe w przypadku $x_0 = \infty$ lub $x_0 = -\infty$.

7.11. Niech

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad \text{dla} \quad x \neq 0.$$

Mamy

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{|x|}{|x|} \cdot \frac{1}{1+x^2} = -1$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{|x|} \cdot \frac{1}{1+x^2} = 1$$

oraz

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{|x|} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{|x|}{|x|} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{1+x^2} = 0$$

Aby sprawdzić równość $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$ bierzemy $\epsilon > 0$ takie, że $\epsilon < 1$ i zauważamy, że $|\frac{1}{1+x^2} - 0| < \epsilon$ zachodzi gdy $x > \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1}$. Wystarczy więc wziąć $M = \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1}$.

Podobnie $|\frac{1}{1+x^2} - 0| < \epsilon$ zachodzi gdy $x < -\sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1}$.