Wykład z analizy

Tydzień 8.

Pochodna

8.1. Niech f będzie funkcją określoną na odcinku (a,b). Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą i niech $x_0 \in (a,b)$. Prosta na płaszczyźnie przechodząca przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$ ma równanie $y = f(x_0) + m_1(x - x_0)$, gdzie

$$m_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Jeśli funkcja jest dostatecznie „gładka" (wykres jej nie ma „kantów") w punkcie x_0, to możemy przeprowadzić styczną do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0)$ zbliżając punkt x_1 do punktu x_0. Równanie prostej stycznej będzie więc miało postać

$$y = f(x_0) + m\ (x - x_0), \quad \text{gdzie} \quad m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Rola punktu x_1 jest tu pomocnicza, jest to punkt blisko punktu x_0, po jego lewej lub prawej stronie. Dlatego zazwyczaj oznaczamy $x_1 - x_0 = h$ i piszemy

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Granicę tę, (o ile istnieje!), nazywamy *pochodną funkcji f w punkcie x_0* i oznaczamy $f'(x_0)$.

8.2. Niech $f(x) = 2x + 1$. Wtedy pochodna funkcji f (której wykres jest prostą o współczynniku kierunkowym 2) jest oczywiście równa 2. Istotnie,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x_0 + h) - 2x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2.$$

8.3. Niech $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ będzie funkcją określoną na odcinku $(-1, 1)$. Wykresem tej funkcji jest półokrąg o promieniu 1 i środku $(0,0)$. Współczynnik kierunkowy prostej stycznej do koła w punkcie $(x_0, \sqrt{1 - x_0^2})$ jest równy $f'(x_0)$. Mamy

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1 - (x_0 + h)^2} - \sqrt{1 - x_0^2}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1 - (x_0 + h)^2} - \sqrt{1 - x_0^2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1 - (x_0 + h)^2} + \sqrt{1 - x_0^2}}{\sqrt{1 - (x_0 + h)^2} + \sqrt{1 - x_0^2}} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-2hx_0 + h^2}{h(\sqrt{1 - (x_0 + h)^2} + \sqrt{1 - x_0^2})} = \lim_{h \to 0} \frac{-2x_0 + h}{\sqrt{1 - (x_0 + h)^2} + \sqrt{1 - x_0^2}} \\ &= \frac{-x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}}. \end{aligned}$$

Wektor $\overrightarrow{(1, -\frac{x_0}{y_0})}$ jest prostopadły do wektora $\overrightarrow{(x_0, y_0)}$. Widzimy, więc, że prosta styczna do półkola w punkcie $(x_0, \sqrt{1 - x_0^2})$ jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{(x_0, \sqrt{1 - x_0^2})}$, bo na prostej o współczynniku kierunkowym m leży oczywiście wektor $\overrightarrow{(1, m)}$.

8.4.Niech $f(x) = |x|$. Wtedy pochodna funkcji f w punkcie 0 *nie istnieje.* Istotnie,

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } h>0 \\ -1 & \text{gdy } h<0 \end{cases}.$$

8.5. Dla ustalonej funkcji f określonej na przedziale (a,b) przyporządkowanie $x \to f'(x)$ jest nową funkcją. Funkcję tę nazywamy pochodną funkcji f. Jej dziedziną są rzecz jasna te punkty x z przedziału (a,b) dla których

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}$$

istnieje. Proces przyporządkowania funkcji f funkcji f' nazywamy *różniczkowaniem.*

8.6. Przykłady.

(a) Niech $f(x) = ax+b$. Wtedy $f'(x) = a$. Istotnie,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)+b-ax-b}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ah}{h} = a.$$

(b) Niech $f(x) = x^2$. Wtedy $f'(x) = 2x$. Istotnie,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

(c) Niech $f(x) = \frac{1}{x}$. Wtedy $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Istotnie,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{x-(x+h)}{x(x+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

(d) Niech $f(x) = \sqrt{x}$. Wtedy $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Istotnie,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

8.7. Niech dla ustalonej funkcji f $\Delta_h f(x) = f(x+h)-f(x)$. Jeśli sztucznie oznaczyć $\Delta_h = h$, to *iloraz różnicowy*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\Delta_h f}{\Delta_h}$$

interpretujemy jako iloraz *przyrostu funkcji* $\Delta_h f(x)$ do *przyrostu argumentu* Δ_h. Pochodna funkcji w punkcie jest więc granicą ilorazu różnicowego, gdy przyrost argumentu dąży do zera. Taką interpretację pochodnej miał na myśli Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), który nieco później niż Isaac Newton (1642-1727), lecz niezależnie od niego stworzył podstawy współczesnej analizy matematycznej. Idąc za Leibnizem przyjęło się pisać

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h f(x)}{\Delta_h} = \frac{df(x)}{dx} \quad \text{gdzie} \quad df = \Delta_h f \text{ i } dx = \Delta_h \quad \text{dla bardzo małych } h.$$

Na przykład

$$\frac{d(ax+b)}{dx} = a, \quad \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Aby w zapisie Leibniza zapisać, że obliczamy pochodną funkcji w punkcie, powiedzmy, 4 piszemy

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}}, \quad \text{np.} \quad \left.\frac{d\sqrt{x}}{dx}\right|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Twierdzenie 8.8. *Niech f będzie funkcją określoną w przedziale (a,b) zawierającym punkt x_0. Funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 równą m wtedy i tylko wtedy, gdy dla $x \in (a,b)$*

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + r(x)(x - x_0), \quad gdzie \quad \lim_{x \to x_0} r(x) = 0. \tag{1}$$

Dowód. Dla $x \neq x_0$ odejmując stronami $f(x_0)$ i dzieląc obie strony (1) przez $x - x_0$ otrzymujemy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m + r(x).$$

Wtedy

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m \iff \lim_{x \to x_0} r(x) = 0. \quad \square$$

Twierdzenie to mówi, że jeśli funkcja ma pochodną w punkcie x_0, to funkcja f jest równa funkcji liniowej plus błąd $r(x)(x - x_0)$, który dla punktów x blisko punktu x_0 jest bardzo mały w stosunku do odległości punktu x od x_0.

Wniosek. *Niech f będzie funkcją określoną w przedziale (a,b) zawierającym punkt x_0. Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 to f jest ciągła w tym punkcie.*

Istotnie, (1) pociąga, że

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \lim_{x \to x_0} (x - x_0) + \lim_{x \to x_0} r(x)(x - x_0) = f(x_0).$$