Wykład z analizy

Tydzień 9.

Obliczanie pochodnych

Twierdzenie 9.1. *Niech f i g będą dwoma funkcjami, załóżmy, że $f'(x_0)$ i $g'(x_0)$ istnieją. Wtedy pochodne sumy, różnicy i iloczynu funkcji f i g w punkcie x_0 istnieją. Jeśli dodatkowo $g(x_0) \neq 0$, to istnieje też pochodna ilorazu funkcji f i g w punkcie x_0. Pochodne te są równe odpowiednio:*

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0), \\ (f-g)'(x_0) &= f'(x_0) - g'(x_0) \\ (f\cdot g)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{g(x_0)f'(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Ponadto dla dowolnej stałej c mamy $\big(cf(x_0)\big)' = cf'(x_0)$.

Wzór (9.1) nosi nazwę wzoru Leibniza.

Dowód.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-(f(x_0)+g(x_0))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}.$$

Dowód wzoru na pochodną różnicy jest identyczny.

W dowodzie wzoru Leibniza używamy faktu, że ponieważ funkcja g ma pochodną w punkcie x_0 to jest w tym punkcie ciągła.

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &\quad= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &\quad= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h) + f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\ &\quad= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\lim_{h\to 0} g(x_0+h) + f(x_0)g'(x_0) \\ &\quad= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

Niech $g(x_0)\neq 0$. Wtedy

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \\ &\quad= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+h)}{g(x_0)g(x_0+h)} \\ &\quad= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+h)}{g(x_0)g(x_0+h)} \\ &\quad= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)}\left(g(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right) \\ &\quad= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

9.2. Z twierdzenia 9.1. wynikają następujące wnioski.

Wnioski.

$$(a)\quad \frac{dc}{dx}=0 \quad dla\ funkcji\ stałej\ c, \qquad (b)\quad \frac{d\left(\frac{1}{g}\right)}{dx}=-\frac{1}{g^2}\frac{dg}{dx},$$
$$(c)\quad \frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1} \quad \forall n\in \mathbf{Z}^+ \qquad (d)\quad \frac{dx^{-n}}{dx}=-nx^{-n-1} \quad \forall n\in \mathbf{Z}^+$$

(a) wynika natychmiast z definicji pochodnej: licznik ilorazu różnicowego jest równy zero dla każdego h.

(b) wynika z twierdzenia o różniczkowaniu ilorazu gdy $f\equiv 1$.

Dla $n=1$ wzór (c) sprawdzamy jak w punkcie 8.2. Dla $n=2,3,..$ wzór (c) wynika ze wzoru dla $n=1$ i wzoru Leibniza. Mamy bowiem,

$$\begin{aligned}\frac{dx^2}{dx}&=\frac{d(x\cdot x)}{dx}=1\cdot x+x\cdot 1=2x\\ \frac{dx^3}{dx}&=\frac{d(x\cdot x^2)}{dx}=1\cdot x^2+x\cdot 2x=3x^2\\ \frac{dx^4}{dx}&=\frac{d(x\cdot x^3)}{dx}=1\cdot x^3+x\cdot 3x^2=4x^3\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Dla sprawdzenia (d) piszemy

$$\frac{dx^{-n}}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx}=-\frac{1}{x^{2n}}\cdot nx^{n-1}=-nx^{-n-1}.$$

9.3. Niech $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ będzie wielomianem. Wtedy

$$\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\right)'=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1.$$

Na przykład $y=3x^5+2x^3-6x+1$, wtedy $y'=15x^4+6x^2-6$.

Twierdzenie. *Pochodna wielomianu stopnia n jest wielomianem stopnia $n-1$. Pochodna funkcji wymiernej f istnieje w każdym punkcie jej dziedziny i też jest funkcją wymierną.*

Na przykład, niech

$$y=\frac{3x^2+5x-7}{x^{10}+1}.$$

Wtedy

$$y'=\frac{(3x^2+5x-7)'(x^{10}+1)-(3x^2+5x-7)(x^{10}+1)'}{(x^{10}+1)^2}=\frac{(6x+5)(x^{10}+1)-(3x^2+5x-7)10x^9}{(x^{10}+1)^2}.$$

Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej 9.4. *Niech $u=f(x)$ będzie funkcją mającą pochodną $f'(x_0)$ w punkcie x_0 i niech funkcja $y=g(u)$ ma pochodną w punkcie $u_0=f(x_0)$. Wtedy funkcja złożona $\varphi=g\circ f$ ma pochodną w punkcie x_0 i*

$$\varphi'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0).$$

W zapisie Leibniza:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Załóżmy, że f i g są funkcjami liniowymi, to znaczy $f(x) = ax + b$, $g(u) = cu + d$. Wtedy $g \circ f(x) = g(f(x)) = c(ax + b) + d = (ca)x + (cb + d)$. Pochodna funkcji liniowej $t \to \alpha t + \beta$ jest równa α. Widzimy więc, że pochodna funkcji $g \circ f$ jest równa ac czyli jest iloczynem pochodnych funkcji f i funkcji g. Używając twierdzenia 8.8. rozumowanie dla funkcji liniowych można przerobić na dowód twierdzenia 9.4.

9.5. Przykłady.
(a) Niech $f(x) = \sqrt{1 + ax^2}$. Wtedy dla x takich, że $1 + ax^2 > 0$ mamy

$$f'(x) = \frac{d\sqrt{1 + ax^2}}{d(1 + ax^2)} \cdot \frac{d(1 + ax^2)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1 + ax^2}} 2ax = \frac{ax}{\sqrt{1 + ax^2}}.$$

Dla $a = -1$ otrzymujemy wzór 8.3.

(b) Ponieważ $\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, więc z 9.4. możemy otrzymać łatwo wzór 9.2.(b):

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g} = \frac{d\left(\frac{1}{g}\right)}{dg}\frac{dg}{dx} = -\frac{1}{g^2}\frac{dg}{dx} = -\frac{g'}{g^2}.$$

(c) Niech $y = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}}$ i niech

$$z = \sqrt{1 + x^2} \quad u = \sqrt{1 + z} \quad y = 1 + \sqrt{1 + u},$$

więc

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1 + u}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + z}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\end{aligned}$$

9.6. Funkcja $y \to g(y)$ jest funkcją odwrotną do funkcji ściśle monotonicznej $x \to f(x)$, jeśli $g(f(x)) = x$. Różniczkując obie strony ostatniej równości otrzymujemy

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \quad \text{skąd, jeśli } f'(x_0) \neq 0 \quad g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ gdzie } y_0 = f(x_0).$$

9.7. Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej ma następującą prostą ilustrację geometryczną. Niech $x \to f(x)$ będzie np. funkcją rosnącą i niech

$$y = mx + b \text{ gdzie } m = f'(x_0)$$

będzie równaniem prostej stycznej w punkcie (x_0, y_0) do wykresu funkcji f. Funkcja odwrotna $y \to g(y)$ do funkcji f ma wykres, który jest odbiciem wykresu funkcji f w prostej $y = x$. Innymi słowy zamieniamy rolami x i y. Wtedy prosta styczna do wykresu funkcji g w punkcie $(y_0, g(y_0)$ jest prostą o równaniu

$$x = \frac{1}{m}y - \frac{1}{m}b \text{ gdzie } g'(y_0) = \frac{1}{m}.$$