

Wykład z analizy

TYDZIEŃ 10.

RÓŻNICZKOWANIE FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

ĆWICZENIA

c10.1 Oblicz pochodne cząstkowe f_x i f_y :

- (a) $f(x, y) = x + 2y$, (b) $f(x, y) = x^2 - 2xy^2$, (c) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$,
(d) $f(x, y) = \sin(x^2 + y)$, (e) $f(x, y) = (xy)^{-1} - \log y$, (f) $f(x, y) = \sin(x/y)$,
(g) $f(x, y) = (1/x)e^{x^2+y^2}$, (h) $f(x, y) = \int_x^y e^{\sin t} dt$, (i) $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$.

c10.2 Niech $g(x, y) = f_x(x, y)$ i $h(x, y) = f_y(x, y)$. Znajdź $g_y(x, y)$ i $h_x(x, y)$:

- (a) $f(x, y) = \sin(x/y)$, (b) $f(x, y) = \log(xtgy)$.

c10.3 Niech $z(u, v) = \sqrt{1 + u^2} + \sqrt{1 + v^2}$. Znajdź $z_u(0, 0)$ i $z_v(0, 0)$.

c10.4 Niech $z(x, y) = \int_x^y \sin t dt$. Oblicz $z_x(x, y) - z_y(x, y)$.

c10.5 Niech $v(a, b) = \int_a^{a+b^2} e^x dx$. Oblicz $v_a(a, b)$ dla $a = 1$, $b = 2$.

c10.6 Znajdź równanie płaszczyzny stycznej i równanie normalnej do zadanej płaszczyzny w zadanym punkcie:

- (a) $z = xy$, $(3, -2, -6)$, (b) $z = x^3 + y^3 + 3xy$, $(1, -1, -3)$,
(c) $z = e^{x^2+y^2}$, $(0, 0, 1)$, (d) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $(2/3, 2/3, 1/3)$.

ZADANIA

z10.1 Pokaż, że równanie płaszczyzny stycznej do elipsoidy $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ w jej punkcie (x_0, y_0, z_0) ma postać $xx_0/a^2 + yy_0/b^2 + zz_0/c^2 = 1$.

z10.2 Pokaż, że powierzchnie $z = xy/(4x - y)$ i $z = \sqrt{(5x - y)/3}$ w punkcie $(1, 2, 1)$ przecinają się pod kątem prostym. (Czyli obie przechodzą przez ten punkt i normalne w tym punkcie są prostopadłe.)

z10.3 Niech $f(x, y)$ będzie określona i posiada ciągle pochodne cząstkowe dla wszystkich (x, y) . Pokaż, że następujące dwa warunki są równoważne:

- (a) $|f_x(x, y)| \leq 1$, $|f_y(x, y)| \leq 1$, dla wszystkich (x, y) ,
(b) $|f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)| \leq \sqrt{2} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$, dla wszystkich x_0, x_1, y_0, y_1 .

z10.4 Niech $f(x, y)$ posiada ciągle wszystkie pochodne cząstkowe do stopnia 2 włącznie dla wszystkich (x, y) , oraz niech dla wszystkich (x, y) zachodzi $(f_x)_y(x, y) = 0$. Pokaż, że $f(x, y) = g(x) + h(y)$.

z10.5 Znajdź wszystkie funkcje trzech zmiennych $f(x, y, z)$ spełniające

$$(f_x)_x = (f_y)_y = (f_z)_z = (f_x)_y = (f_x)_z = (f_y)_z = 0.$$