

Wykład z analizy

TYDZIEŃ 11.

RÓŻNICZKOWANIE FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH II

ĆWICZENIA

- c11.1 Znajdź $\partial z/\partial u$ i $\partial z/\partial v$
(a) $z = x^2 + xy + y^2$, $x = 2u - v$, $y = u - 2v$, (b) $z = x^2 - y^2$, $x = u^2 + v^2$, $y = 2uv$,
(c) $z = x^2 + y^2$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, (d) $z = xe^y - ye^x$, $x = uv$, $y = u^2 - v^2$,
(e) $z = x/(x^2 + y^2)$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, (f) $z = \log(x^2 + y^2)$, $x = ue^{-v}$, $y = ue^v$.
- c11.2 Znajdź u_s i u_t w podanym punkcie
(a) $u = 1/(x + y)$, $x = \sin(s + t)$, $y = \cos(s + t)$, $s = t = \pi/4$,
(b) $u = e^{x/y}$, $x = s \cos t$, $y = t \cos s$, $s = 0$, $t = \pi/2$,
(c) $u = \arcsin xy$, $x = \log s$, $y = \log t$, $s = t = 1$.
- c11.3 Znajdź gradient, punkty krytyczne, jednostkowy wektor w kierunku najszybszego wzrostu w podanym punkcie P i pochodną kierunkową w punkcie P w podanym kierunku θ
(a) $F(x, y) = 3x^2 - 6y^2$, $P = (8, 2)$, $\theta = 2\pi/3$, (b) $F(x, y) = ye^{2x}$, $P = (0, 4)$, $\theta = 3\pi/4$,
(c) $F(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2 + 6x$, $P = (2, 1)$, $\theta = 4\pi/3$, (d) $F(x, y) = e^x \cos y$, $P = (0, 0)$, $\theta = \pi/3$.
- c11.4 Znajdź równanie poziomicy przechodzącej przez dany punkt P i wektor styczny do poziomicy w P dla funkcji z poprzedniego ćwiczenia.
- c11.5 Używając reguły łańcuchowej znajdź $\partial w/\partial r$, $\partial w/\partial s$ i $\partial w/\partial t$ dla podanych funkcji
(a) $w = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $x = r + e^{st}$, $y = r - e^{st}$, (b) $w = x \log y$, $x = rst^2$, $y = rst$,
(c) $w = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $x = r + 2s + t$, $y = r - 2s + t$, (d) $w = x^2 - 2y^2 + z^2$, $x = r^2 - s^2$, $y = s^2 - t^2$, $z = t^2 - r^2$.
- c11.6 Dla następujących funkcji znajdź gradient, punkty krytyczne, wektor jednostkowy w kierunku najszybszego wzrostu w danym punkcie P , prędkość najszybszego wzrostu w P i pochodną kierunkową w P w kierunku danego wektora jednostkowego $\mathbf{n}$
(a) $F(x, y, z) = xy + z^2 + x + y$, $P = (1, 1, 1)$, $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$,
(b) $F(x, y, z) = x^2 + xy + yz + 4z$, $P = (1, 0, 3)$, $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$,
(c) $F(x, y, z) = x^3 - y^2 + yz - 12x$, $P = (2, 1, 0)$, $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$.
- c11.7 Znajdź $F'(x)$ dla:
(a) $\int_x^{x^2} xy \, dy$, (b) $\int_{\sin x}^{\cos x} x^2 y \, dy$.

ZADANIA

- z11.1 Jeśli $f(t)$ jest funkcją różniczkowalną, a $F(x, y) = f(x - 2y)$ to pokaż, że $2F_x(x, y) + F_y(x, y) = 0$.
(Wsk. $t = x - 2y$.)
- z11.2 Jeżeli $f(t)$ jest funkcją różniczkowalną, $f'(t) > 0$ i $\phi(u, v) = f(u + v)$, to co można powiedzieć o $\phi_u + \phi_v$?
- z11.3 Udowodnij twierdzenie z wykładu o pochodnych cząstkowych funkcji złożonej (regułę łańcuchową).
- z11.4 Dla $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ napisz równanie poziomicy (powierzchni) przechodzącej przez $(-1, 3, 4)$.
Znajdź normalną do tej powierzchni w danym punkcie i sprawdź, że jest równoległa do gradientu.
- z11.5 Korzystając z twierdzenia o równości pochodnych mieszanych udowodnij, że jeżeli f_x i f_y mają ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu, to $(f_{xx})_y = (f_{xy})_x = (f_{yx})_x$.
- z11.6 Niech $f(x, y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu 2, i niech spełnia następujący warunek

$$c^2 f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) \quad \text{dla wszystkich } (x, y).$$

Pokaż, że $f(x, y) = g(x + cy) + h(x - cy)$ dla pewnych funkcji jednej zmiennej g i h .
(Wsk. Rozważ funkcję $\phi(\zeta, \eta) = f((\zeta + \eta)/2, (\zeta - \eta)/2c)$ i oblicz $\phi_{\zeta\eta}$.)