

Wykład z analizy

TYDZIEŃ 12.

CAŁKI WIELOKROTNE

ĆWICZENIA

c12.1 Oblicz objętość bryły pod wykresem $z = f(x, y)$. Skorzystaj z całek iterowanych, i oblicz je w obu kolejnościach.

- (a) $f(x, y) = x + 4y$, $0 < x < 2$, $1 < y < 2$, (b) $f(x, y) = 3x^2y + 1$, $1 < x < 2$, $1 < y < 3$,
(c) $f(x, y) = \sqrt{xy} + 2x + y$, $0 < x < 1$, $0 < y < 4$, (d) $f(x, y) = \cos x \cos 2y$, $0 < x < \pi/2$, $0 < y < \pi/4$,
(e) $f(x, y) = e^{2x+y}$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $0 < y < 1$, (f) $f(x, y) = y^2e^{-x}$, $0 < x < 1$, $0 < y < 9$

c12.2 Oblicz następujące całki.

- (a) $\int_0^2 \int_{-1}^0 (2x - y) dx dy$, (b) $\int_{-2}^1 \int_0^1 x^2 y^3 dx dy$,
(c) $\int_{-2}^2 \int_{-3}^3 (3x^2 y - xy^2) dx dy$, (d) $\int_0^{3\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos x \sin 2y dx dy$,
(e) $\int_0^{\pi/3} \int_0^{\pi/2} \cos(2x + y) dx dy$, (f) $\int_0^1 \int_{-1}^0 x e^{-xy} dx dy$.

c12.3 Oblicz $\int_D f(x, y) dx dy$

- (a) $f(x, y) = x^2 y$, D jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$,
(b) $f(x, y) = xy$, D jest kwadratem o wierzchołkach $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$,
(c) $f(x, y) = 3x + 4y$, D jest wnętrzem koła jednostkowego,
(d) $f(x, y) = xy$, D jest ograniczony krzywą $y = \sin x$ i odcinkiem $0 \leq x \leq \pi$,
(e) $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, D jest wnętrzem okręgu $x^2 + y^2 = R^2$ (zinterpretuj wynik),
(f) $f(x, y) = \cos(x+y)$, D jest obszarem wyciętym przez osie współrzędnych pomiędzy dwoma prostymi równoległymi o współczynniku kierunkowym 2 przechodzącymi przez punkty $(1, 0)$ i $(2, 0)$.

ZADANIA

z12.1 Korzystając z geometrycznej interpretacji całki podwójnej jako całek iterowanych udowodnij następujące własności

- (a) $\int_D \alpha f(x, y) dx dy = \alpha \int_D f(x, y) dx dy$, dla dowolnej stałej α ,
(b) $\int_D f(x, y) dx dy \leq \int_D g(x, y) dx dy$ jeżeli $f(x, y) \leq g(x, y)$ w D ,
(c) $\int_D f(x, y) dx dy = \int_{D_1} f(x, y) dx dy + \int_{D_2} f(x, y) dx dy$ jeżeli D jest rozłączną sumą D_1 i D_2 .

z12.2 Niech $f(x, y) = (x^2 + y^4 + 6)/xy$ dla $xy \neq 0$ i $f(x, y) = 77$ dla $xy = 0$. Czy $f(x, y)$ jest kawałkami ciągła na każdym skończonym przedziale? Czy jest ograniczona na każdym przedziale skończonym?

z12.3 Czy suma, różnica, iloczyn i iloraz funkcji kawałkami ciągłych są kawałkami ciągłe? Czy trzeba coś dodatkowo założyć? Jeśli tak, to co?

z12.4 $f(x, y)$ jest kawałkami ciągła na przedziale I . Czy $\sin f(x, y)$ jest kawałkami ciągła na I ?

z12.5 $\phi(x, y)$ i $\psi(x, y)$ są funkcjami schodkowymi na pewnym przedziale I . Udowodnij, że funkcja $M(x, y) = \max\{\phi(x, y), \psi(x, y)\}$ (większa z liczb $\phi(x, y)$ i $\psi(x, y)$) też jest schodkowa.