

Wykład z analizy

TYDZIEŃ 13.

CAŁKI WIELOKROTNE II

ĆWICZENIA

c13.1 Znajdź pole płata powierzchniowego

- (a) $z = \frac{4}{3}x^{3/2}$, $0 < x < 2$, $-1 < y < 0$, (b) $z = 2x - y + 1$, $0 < x < 2$, $0 < y < 2$,
(c) $z = x^2 + \sqrt{3}y + 1$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, (d) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y > \frac{1}{4}x^2$, $y < 1$,
(e) Powierzchni cylindra $x^2 + z^2 = 9$ leżącej w obszarze $x, y, z \geq 0$, odciętej płaszczyznami $y = 0$ i $y = x$,
(f) Powierzchni cylindra $x^2 + z^2 = 4$ leżącej w obszarze $x, y, z \geq 0$, odciętej cylindrem $x^2 + y^2 = 4$,
(g) Powierzchni cylindra $y^2 + z^2 - 4z = 0$, odciętej sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 16$,
(h) Powierzchni sfery $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$, leżącej wewnątrz stożka $z^2 = x^2 + y^2$.

c13.2 Oblicz $\iint_D f(x, y) dx dy$ używając współrzędnych biegunowych

- (a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, D jest obszarem w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych ograniczonym okręgiem jednostkowym,
(b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$, D jest obszarem w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych ograniczonym okręgami $x^2 + y^2 = 1$ oraz $x^2 + y^2 = 4$,
(c) $f(x, y) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$, D jest obszarem w górnej półpłaszczyźnie ograniczonym okręgiem $x^2 + y^2 = 16$.

c13.3 Sprawdź, czy całka niewłaściwa jest zbieżna, a jeśli tak, to ją oblicz

- (a) $\iint_I \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{xy}} dx dy$, gdzie I jest przedziałem $0 < x, y < 1$,
(b) $\iint_I \frac{x+y}{xy} dx dy$, gdzie I jest przedziałem $0 < x, y < 1$,
(c) $\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx dy$, gdzie D jest kołem jednostkowym,
(d) $\iint_D \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} dx dy$, gdzie D jest zewnątrz koła jednostkowego,
(e) $\iint_D \frac{\log \sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)} dx dy$, gdzie D zewnątrz koła jednostkowego.

c13.4 Oblicz objętość

- (a) Wnętrza ostrosłupa ograniczonego płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ oraz $6x + 4y + 3z = 12$,
(b) Wnętrza cylindra $x^2 + y^2 = 9$ powyżej $z = 0$ i poniżej $x + z = 4$,
(c) Części wspólnej cylindrów $x^2 + y^2 = 9$ i $x^2 + z^2 = 9$.

ZADANIA

z13.1 D jest odcinkiem „rury”, ograniczonym cylindrami $y^2 + z^2 = 4$, $y^2 + z^2 = 9$, oraz płaszczyznami $x = 1$, $x = 2$. Oblicz $\iiint_D e^x \sqrt{y^2 + z^2} dx dy dz$.

z13.2 Dwa cylindry mają ten sam promień podstawy R . Ich osie przecinają się pod kątem prostym. Oblicz objętość przecięcia.

z13.3 Oblicz całkę $\int_0^{+\infty} \sqrt{u} e^{-u} du$.

z13.4 Udowodnij, że jeżeli B jest bryłą obrotową powstałą przez obrót obszaru $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ ($f(x) > 0$) wokół osi x -ów to wzór na objętość takiej bryły podany rok temu zgadza się ze wzorem obecnym, czyli całką $\iiint_B dx dy dz$.