Wykład z analizy

Tydzień 13.

Całki wielokrotne II

Ćwiczenia

c13.1 Znajdź pole płata powierzchniowego
(a) $z = \frac{4}{3}x^{3/2},\ 0 < x < 2,\ -1 < y < 0$, (b) $z = 2x - y + 1,\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 2$,
(c) $z = x^2 + \sqrt{3}y + 1,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$, (d) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ y > \frac{1}{4}x^2,\ y < 1$,
(e) Powierzchni cylindra $x^2 + z^2 = 9$ leżącej w obszarze $x, y, z \geqslant 0$, odciętej płaszczyznami $y = 0$ i $y = x$,
(f) Powierzchni cylindra $x^2 + z^2 = 4$ leżącej w obszarze $x, y, z \geqslant 0$, odciętej cylindrem $x^2 + y^2 = 4$,
(g) Powierzchni cylindra $y^2 + z^2 - 4z = 0$, odciętej sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 16$,
(h) Powierzchni sfery $x^2 + y^2z^2 - 4z = 0$, leżącej wewnątrz stożka $z^2 = x^2 + y^2$.

c13.2 Oblicz $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ używając współrzędnych biegunowych
(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, D jest obszarem w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych ograniczonym okręgiem jednostkowym,
(b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$, D jest obszarem w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych ograniczonym okręgami $x^2 + y^2 = 1$ oraz $x^2 + y^2 = 4$,
(c) $f(x, y) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$, D jest obszarem w górnej półpłaszczyźnie ograniczonym okręgiem $x^2 + y^2 = 16$.

c13.3 Sprawdź, czy całka niewłaściwa jest zbieżna, a jeśli tak, to ją oblicz
(a) $\iint_I \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy$, gdzie I jest przedziałem $0 < x, y < 1$,
(b) $\iint_I \frac{x+y}{xy}\,dx\,dy$, gdzie I jest przedziałem $0 < x, y < 1$,
(c) $\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy$, gdzie D jest kołem jednostkowym,
(d) $\iint_D \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}\,dx\,dy$, gdzie D jest *zewnętrzem* koła jednostkowego,
(e) $\iint_D \frac{\log\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, gdzie D *zewnętrzem* koła jednostkowego.

c13.4 Oblicz objętość
(a) Wnętrza ostrosłupa ograniczonego płaszczyznami $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ oraz $6x + 4y + 3z = 12$,
(b) Wnętrza cylindra $x^2 + y^2 = 9$ powyżej $z = 0$ i poniżej $x + z = 4$,
(c) Części wspólnej cylindrów $x^2 + y^2 = 9$ i $x^2 + z^2 = 9$.

Zadania

z13.1 D jest odcinkiem „rury" , ograniczonym cylindrami $y^2 + z^2 = 4,\ y^2 + z^2 = 9$, oraz płaszczyznami $x = 1,\ x = 2$. Oblicz $\iiint_D e^x\sqrt{y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$.

z13.2 Dwa cylindry mają ten sam promień podstawy R. Ich osie przecinają się pod kątem prostym. Oblicz objętość przecięcia.

z13.3 Oblicz całkę $\int_0^{+\infty} \sqrt{u}e^{-u}\,du$.

z13.4 Udowodnij, że jeżeli B jest bryłą obrotową powstałą przez obrót obszaru $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ ($f(x) > 0$) wokół osi x-ów to wzór na objętość takiej bryły podany rok temu zgadza się ze wzorem obecnym, czyli całką $\iiint_B dx\,dy\,dz$.