

Wykład z analizy

TYDZIEŃ 14.

CAŁKI WIELOKROTNE III, CAŁKI KRZYWOLINIOWE

ĆWICZENIA

- c14.1 Oblicz całkę $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$
- (a) $f(x, y, z) = z^2$, D jest bryłą ograniczoną sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 4$,
 - (b) $f(x, y, z) = xyz$, D jest częścią kuli jednostkowej leżącą w obszarze $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$,
 - (c) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^3$, D jest bryłą opisaną przez $x > 0$, $y > 0$, $x^2 + y^2 + z^2 < \sqrt{3}$,
 - (d) $f(x, y, z) = xy^2$, D jest przekrojem kuli jednostkowej, półprzestrzeni $z > 0$ i stożka $x^2 + y^2 < z^2$.
- c14.2 D jest obszarem określonym przez $x^2 + y^2 + z^2 > 1$. Dla jakiej wartości α całka niewłaściwa $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)^{-\alpha/2} dx dy dz$ istnieje?
- c14.3 Oblicz objętość bryły
- (a) ograniczonej sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ i płaszczyznami $z = 3$, $z = 4$,
 - (b) powstałej przez usunięcie stożka $3(x^2 + y^2) \leq z^2$ z półkuli $z > 0$, $x^2 + y^2 + z^2 < 9$,
 - (c) ograniczonej sferami $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i stożkiem $x^2 + y^2 = z^2$,
 - (d) ograniczonej z góry przez sferę $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, a z dołu przez stożek $x^2 + y^2 = z^2$.
- c14.4 Oblicz całki krzywoliniowe
- (a) $\int_C y dx + x dy$, C określone przez $x(t) = t + 1$, $y(t) = 2t - 1$, $0 \leq t \leq 2$,
 - (b) $\int_C (x + y) dx + (x - y) dy$, C określone przez $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = t^2 - 1$, $1 \leq t \leq 2$,
 - (c) $\int_C y \cos x dx - x \cos y dy$, C określone przez $x(t) = t$, $y(t) = 2t$, $0 \leq t \leq \pi/4$,
 - (d) $\int_C ye^x dx + xe^y dy$, C określone przez $x(t) = t$, $y(t) = 4t$, $0 \leq t \leq 1$,
 - (e) $\int_C (x^2 + y) dx - (x + y^2) dy$, C określone przez $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.
 - (f) $\int_C y dx + (1 + x) dy$, C jest półokręgiem $y = \sqrt{1 - x^2}$ od punktu $(1, 0)$ do $(-1, 0)$ połączonym z odcinkiem prostoliniowym od $(-1, 0)$ do $(0, 0)$.
 - (g) $\int_C (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$, C jest najkrótszą drogą po jakiej pająk może przejść na płaszczyźnie xy z punktu $(-2, 0)$ do $(1, 0)$, jeżeli nie może wejść do koła jednostkowego (są dwie najkrótsze drogi, całka jest taka sama po obu).
 - (h) $\int_C (x + y) dx(x - y) dy$, C jest elipsą $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ przebiegniętą raz w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara, zaczynając w punkcie $(0, b)$.
- c14.5 Upewnij się, że całki nie zależą od wyboru konkretnej drogi całkowania z punktu P do Q i oblicz
- (a) $\int_C A dx + B dy$, $P = (x_0, y_0)$, $Q = (x_1, y_1)$,
 - (b) $\int_C (y^2 - 2xy) dx + (2xy - x^2) dy$, $P = (1, 1)$, $Q = (-1, -2)$,
 - (c) $\int_C x(x^2 + y^2)^{-1/2} dx + y(x^2 + y^2)^{-1/2} dy$, $P = (3, 4)$, $Q = (5, 12)$.

ZADANIA

- z14.1 Udowodnij własności całki krzywoliniowej:
- (a) $\int_{-C} P dx + Q dy = -\int_C P dx + Q dy$,
 - (b) $\int_{C_1+C_2} P dx + Q dy = \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy$.