

Wykład z analizy

TYDZIEŃ 15.

CAŁKI KRZYWOLINIOWE II

ĆWICZENIA

c15.1 Sprawdź prawdziwość twierdzenia Greena obliczając obie strony równości

- (a) $P = y$, $Q = x$, D jest kołem jednostkowym,
- (b) $P = x + y$, $Q = x^2 - y^2$, D jest kołem jednostkowym
- (c) $P = xy$, $Q = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, D jest kwadratem $0 < x < 1$, $0 < y < 1$,
- (d) $P = x^2 + y^2$, $Q = 2xy$, D jest trójkątem $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$,
- (e) $P = y \cos x$, $Q = x \sin y$, D jest kwadratem z wierzchołkami $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$,
- (f) $P = xy^2$, $Q = x^2y$, D jest częścią pierścienia $1 < x^2 + y^2 < 4$ w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

c15.2 Oblicz pole

- (a) elipsy ograniczonej przez krzywą $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$,
- (b) obszaru ograniczonego przez hipocykloidę $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$,
- (c) obszaru ograniczonego przez kardiodę $x(\theta) = 2 \cos \theta (1 - \cos \theta) + 1$, $y(\theta) = 2 \sin \theta (1 - \cos \theta)$,
- (d) obszaru ograniczonego przez $r = \theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$ i przez oś współrzędnych,
- (e) obszaru ograniczonego przez krzywą $y = x^{3/2}$ i proste $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$,
- (f) pod jednym łukiem cykloidy $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$.

c15.3 Oblicz całkę po danej krzywej C

- (a) $\int_C yz \, dx + zx \, dy + xy \, dz$, $C: x(t) = t$, $y(t) = t - 1$, $z(t) = t + 1$, $0 \leq t \leq 1$,
- (b) $\int_C y^2 \, dx + x^2 \, dy + (x^2 + y^2) \, dz$, $C: x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, $z(t) = t$, $0 \leq t \leq \pi/2$,
- (c) $\int_C \cos y \, dx + \sin x \, dy + xy \, dz$, C : jest odcinkiem od $(0, 0, 1)$ do $(\pi/2, \pi/2, 4)$.

c15.4 Oblicz całkę krzywoliniową po jakiejś krzywej łączącej podane punkty

- (a) $\int_C xy^2z^2 \, dx + x^2yz^2 \, dy + x^2y^2z \, dz$, $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 2, 2)$,
- (b) $\int_C yze^{xyz} \, dx + xze^{xyz} \, dy + xye^{xyz} \, dz$, $P = (0, 0, 0)$, $Q = (1, 1, 1)$,
- (c) $\int_C (2xy + z^2) \, dx + (x^2 + 2yz) \, dy + (y^2 + 2zx) \, dz$, $P = (1, 2, 2)$, $Q = (2, 3, 4)$.