

## Wykład z analizy

### TYDZIEŃ 2.

### WEKTORY II

### ĆWICZENIA

- c2.1 Podane są współrzędne prostokątne punktu. Znajdź współrzędne biegunowe.  
(a)  $(0, 1/2)$ , (b)  $(-3, 3)$ , (c)  $(-2 \sin \frac{1}{9}\pi, 2 \cos \frac{1}{9}\pi)$ , (d)  $(-\sqrt{3}, 1)$ .
- c2.2 Podane są współrzędne biegunowe punktu. Podaj współrzędne prostokątne.  
(a)  $(3, 3\pi/2)$ , (b)  $(\sqrt{3}, 5\pi/6)$ , (c)  $(\frac{1}{2}, \pi/4)$ , (d)  $(2, 3\pi/4)$ .
- c2.3 Podane jest równanie krzywej we współrzędnych prostokątnych. Podaj równanie we współrzędnych biegunowych.  
(a)  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ , (b)  $x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} - 3 = 0$ ,  
(c)  $x^2 y^2 = x^2 + y^2$ , (d)  $\arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2}) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- c2.4 Podane jest równanie krzywej we współrzędnych biegunowych. Podaj równanie we współrzędnych prostokątnych.  
(a)  $r^2 - 2r \cos \theta - 3 = 0$ , (b)  $r^2 = \sin \theta$ , (c)  $r = \sin \theta + \cos \theta$ , (d)  $r = 4/(6 \cos \theta - 5 \sin \theta)$ .
- c2.5 Naskicuj krzywą zadaną równaniem we współrzędnych biegunowych. Wykorzystaj możliwe symetrie krzywej.  
(a)  $r = 2/\cos \theta$ , (b)  $r = 1 + \cos \theta$ , (c)  $r = \cos \theta \cos 2\theta$ , (d)  $r = 1/(\sin \theta - \cos \theta)$ .

### ZADANIA

- z2.1 Udowodnić następujące twierdzenie. Niech  $P$  i  $Q$  będą dwoma różnymi punktami na płaszczyźnie. Punkt  $X$  leży na prostej wyznaczonej przez  $P$  i  $Q$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby  $\alpha$  i  $\beta$  spełniające  $\alpha + \beta = 1$  takie, że

$$\mathbf{X} = \alpha \mathbf{P} + \beta \mathbf{Q}.$$

Litery pogrubione oznaczają wektory wodzące odpowiadające punktom.

- z2.2 Udowodnić, że liczby  $\alpha$  i  $\beta$  z zadania 2.1 spełniają

$$\frac{|\vec{PX}|}{|\vec{QX}|} = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|.$$

- z2.3 Niech będzie dany odcinek skierowany  $\vec{PQ}$  ( $P$  i  $Q$  są różne), i liczby dodatnie  $m$  i  $n$ . Jeżeli punkt  $X$  leży na odcinku  $\vec{PQ}$  i dzieli go w stosunku  $n/m$  (czyli  $|\vec{PX}|/|\vec{QX}| = n/m$ ), to wektor wodzący punktu  $X$  wyraża się przez

$$\mathbf{X} = \frac{m}{m+n} \mathbf{P} + \frac{n}{m+n} \mathbf{Q}.$$

- z2.4 Korzystając z poprzednich zadań udowodnić, że cztery punkty  $A, B, C$  i  $D$  są wierzchołkami równoległoboku (w tej kolejności) wtedy i tylko wtedy, gdy przekątne  $\vec{AC}$  i  $\vec{BD}$  przecinają się w połowie swoich długości.

- z2.5 korzystając z poprzednich zadań udowodnić następujący fakt. Niech  $A, B$  i  $C$  będą wierzchołkami trójkąta. Niech  $P$  dzieli  $\vec{BC}$  w stosunku  $\frac{2}{3}/\frac{1}{3}$ , a  $Q$  dzieli  $\vec{AC}$  w tym samym stosunku. Niech  $X$  będzie punktem przecięcia prostych wyznaczonych przez punkty  $A$  i  $P$  oraz  $B$  i  $Q$ . Pokazać, że  $X$  dzieli  $\vec{AP}$  i  $\vec{BQ}$  w stosunku  $\frac{3}{4}/\frac{1}{4}$ .