Wykład z analizy

Tydzień 4.

Krzywe stożkowe

Ćwiczenia

c4.1 Znajdź równanie prostej stycznej do danej krzywej w danym punkcie, metodą analityczną (przy pomocy różniczkowania) i przy pomocy charakteryzacji podanej na wykładzie. Wyniki powinny się zgadzać :-)
(a) $25x^2 - y^2 = 100$, $(-3, 5\sqrt{5})$, (b) $4y^2 - x^2 = 1$, $(-1, -\sqrt{2}/2)$,
(c) $xy = 1$, $(4, \frac{1}{4})$, (d) $y^2 = 25x$, $(9, -15)$.

c4.2 Znajdź równanie danej krzywej we współrzędnych biegunowych
(a) Parabola z ogniskiem $(0, 0)$ i kierownicą $x = -5$,
(b) Elipsa o ekscentryczności $\frac{1}{4}$ i ogniskach $(0, 0)$ i $(6, 0)$,
(c) Hiperbola o ekscentryczności 2, jednym z ognisk $(0, 0)$ i odpowiadającej kierownicy $x = -1$,
(d) Hiperbola równoramienna o ogniskach $(0, 0)$ i $(-5, 0)$.

c4.3 Rozpoznaj krzywą zadaną równaniem we współrzędnych biegunowych, znajdź współrzędne prostokątne ognisk, wierzchołków, równania osi, asymptot i wykonaj szkic
(a) $r = 10/(1 - \cos\theta)$, (b) $r = 4/(1 - 20\cos\theta)$, (c) $r = 1/(20 - 25\cos\theta)$.

c4.4 Znajdź współrzędne prostokątne ognisk i wierzchołków krzywej danej równaniem parametrycznym
(a) $x = (\cos t)/100,\ y = (\sin t)/10000$, (b) $x = \pm 2\cosh t,\ y = 3\sinh t$, (c) $x = \frac{3}{2}\cos t,\ y = \frac{1}{2}\sin t$.

c4.5 Ustalony jest prostokątny, prawoskrętny układ współrzędnych $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Określ, czy układ $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ jest prawo- czy lewoskrętny
(a) $\mathbf{f}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2,\ \mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2$, (b) $\mathbf{f}_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2,\ \mathbf{f}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2$.

Zadania

z4.1 Znajdź wszystkie styczne do elipsy $9x^2 + 25y^2 = 225$ o współczynniku kierunkowym $9/25$.

z4.2 Znajdź wszystkie styczne do hiperboli $x^2 - y^2 = 16$ przechodzące przez punkt $(3, -1/3)$.

z4.3 Układ współrzędnych $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ powstał przez obrót układu $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ o kąt $\pi/9$. Punkt P ma prostokątne współrzędne $(2\cos\frac{1}{9}\pi, 2\sin\frac{1}{9}\pi)$ w układzie $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Znajdź jego współrzędne biegunowe w układzie $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$