Wykład z analizy

TYDZIEŃ 5.

KRZYWE STOŻKOWE II

ĆWICZENIA

c5.1 Prostokątny układ współrzędnych $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ otrzymany jest z prostokątnego układu $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ przez obrót o kąt θ. $\mathcal{O}$ oznacza początek układu
(a) Jeśli $\theta = 5\pi/6$ i P ma kartezjańskie współrzędne $(2, -1)$ w układzie $\{\mathcal{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, to jakie są kartezjańskie współrzędne P w układzie $\{\mathcal{O}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$?
(b) Jeśli $\theta = 3\pi/4$ i P ma współrzędne biegunowe $(2, \pi/3)$ w układzie $\{\mathcal{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, to jakie są kartezjańskie współrzędne P w układzie $\{\mathcal{O}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$?
(c) Jeśli $\theta = \pi/9$ i P ma kartezjańskie współrzędne $(2\cos\frac{1}{9}\pi, 2\sin\frac{1}{9}\pi)$ w układzie $\{\mathcal{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, to jakie są współrzędne biegunowe P w układzie $\{\mathcal{O}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$?
(d) Jeśli $\theta = \pi/10$ i P ma współrzędne biegunowe $(\frac{1}{2}, \pi/4)$ w układzie $\{\mathcal{O}, \mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2\}$, to jakie są współrzędne biegunowe P w układzie $\{\mathcal{O}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$?

c5.2 Niech będzie dany prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie, a (x, y) oznacza współrzędne punktów.
(a) Znajdź kąt pomiędzy osią y-ów a prostą $2x - 3y - 5 = 0$,
(b) Niech l_1 będzie określona przez $x - 2y = 0$, a l_2 przez $2x - 3y - 6 = 0$, znajdź $\angle(l_1, l_2)$,
(c) Znajdź kąt pomiędzy prostymi stycznymi do okręgu $x^2 + y^2 = 1$ w punktach $x = \sqrt{2}/2$ i $x = \frac{4}{5}$, w takiej kolejności,
(d) Znajdź kąt pomiędzy krzywymi (czyli pomiędzy prostymi stycznymi) $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$ w ich punkcie przecięcia,
(e) Jeśli l_1 ma równanie $-y + \frac{4}{3}x = -1$ i $\angle(l_1, l_2) = 25°$, znajdź nachylenie l_2.

c5.3 Znajdź równanie drugiego stopnia zmiennych x i y opisujące krzywą
(a) Prostą o nachyleniu $\frac{1}{2}$ przechodzącą przez punkt $(2, 3)$,
(b) Dwie proste o nachyleniach $\sqrt{3}/3$ i $\sqrt{3}$ przechodzące przez punkt $(1, 0)$,
(c) Elipsę o wierzchołkach w punktach $\pm(3, -4)$ i $\pm(\frac{4}{3}, 1)$.

ZADANIA

z5.1 Udowodnij twierdzenie: Jeżeli proste l_1 i l_2 mają nachylenia (współczynniki kierunkowe) m_1 i m_2 to

$$\operatorname{tg} \angle(l_1, l_2) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

z5.2 Udowodnij następujący fakt: Niech l_1 i l_2 mają współczynniki kierunkowe m_1 i m_2 i $m_1 + m_2 \neq 0$. Niech prosta l dzieli kąt między l_1 i l_2 na pół (są dwie takie proste). Wtedy współczynnik kierunkowy m tej prostej jest pierwiastkiem równania

$$m^2 + 2\frac{1 - m_1 m_2}{m_1 + m_2} m = 1.$$

z5.3 Pokazać, że dwie proste l o których mowa w zadaniu 2 są prostopadłe, niezależnie od l_1 i l_2.

z5.4 Udowodnij, że jeśli elipsa i hiperbola są współogniskowe (czyli ich ogniska się pokrywają), to przecinają się pod kątem prostym.