

Wykład z analizy

TYDZIEŃ 6.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY FUNKCJI O WARTOŚCIACH WEKTOROWYCH

ĆWICZENIA

c6.1 Znajdź funkcję opisującą podany ruch. (x, y) oznacza współrzędne prostokątne, a (r, θ) współrzędne biegunowe względem ustalonego układu $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

(a) Cząstka porusza się w prawo po paraboli $y = x_2$, zaczynając od punktu $(1, 1)$ w czasie $t = 0$, lądując w punkcie $(2, 4)$ w czasie $t = 3$. Prędkość pozioma jest proporcjonalna do upływu czasu t .

(b) Cząstka porusza się w prawo po krzywej $y = x_3$, zaczynając od punktu $(0, 0)$ w czasie $t = 2$, lądując w punkcie $(2, 8)$ w czasie $t = 4$. Nachylenie stycznej do toru cząstki, w miejscu w którym się akurat znajduje, jest proporcjonalne do trzeciej potęgi czasu, który upłynął od początku ruchu.

c6.2 Niech $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ będzie ustalonym prostokątnym układem współrzędnych na płaszczyźnie. Oblicz pochodne

(a)

$$\frac{d}{dt}(t\mathbf{e}_1 - (\log t)^3\mathbf{e}_2),$$

(b) Drugą pochodną

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{t\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{|t\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2|} \right),$$

(c)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t}(t\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + (\cos t)(t^2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \right),$$

oraz całki

(d)

$$\int_1^3 \left(2^t\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{t}+1}\mathbf{e}_2 \right) dt,$$

(e)

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{t\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2}{t^2 + 1} dt.$$

ZADANIA

z6.1 Udowodnij podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego dla funkcji o wartościach wektorowych:

$$\int_a^b \mathbf{f}(t) dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a).$$

z6.2 Krążek o promieniu b toczy się po zewnętrznej stronie okręgu o promieniu a , nie odpadając, i nie ślizgając się. Na obwodzie krążka znajduje się punkt P . Znajdź parametryczny opis krzywej po której porusza się punkt P .

z6.3 Zadanie takie samo jak 2, tylko $b < a$ i krążek toczy się po wewnętrznej stronie okręgu.