Wykład z analizy

Tydzień 8.

Długość krzywej, krzywizna

Ćwiczenia i zadania

8.1 Znajdź długość krzywej gładkiej określonej przez podaną funkcję w podanym zakresie parametru:
(a) $\mathbf{f}(t) = (t^2 - 1, t^3)$, dla $\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3}$, (b) $\mathbf{f}(t) = (\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2})$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$,
(c) $\mathbf{f}(t) = (\frac{1}{6}t^6, \frac{1}{4}t^4)$, dla $1 \leqslant t \leqslant \sqrt[4]{5}$, (d) $\mathbf{f}(t) = (2e^{t/2}, 4e^{3t/4})$ dla $0 \leqslant t \leqslant 2$,
(e) $\mathbf{f}(t) = (\frac{1}{3}\cos^3 t, \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t)$, dla $\pi/6 \leqslant t \leqslant \pi/3$, (f) $\mathbf{f}(t) = (\sin t, \sin^{3/2} t)$ dla $0 \leqslant t \leqslant \pi/4$,
(g) $\mathbf{f}(t) = (\sqrt{t^2+1}, \sqrt{t})$, dla $1 \leqslant t \leqslant 4$, odpowiedź pozostaw w postaci całki,
(h) $\mathbf{f}(t) = (\cos t^2, \sin t^3)$ dla $\sqrt{\pi}/4 \leqslant t\sqrt{\pi}/2$, odpowiedź pozostaw w postaci całki.

8.2 Znajdź długość krzywej zadanej równaniem we współrzędnych biegunowych, w podanych granicach:
(a) $r = \theta^2$, dla $\sqrt{5} \leqslant \theta \leqslant 2\sqrt{3}$, (b) $r = e^{a\theta}$, dla $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, a – ustalona liczba,
(c) $r = \frac{1}{\cos\theta}$, dla $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$, (d) $r = 1 + \cos\theta$, dla $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, odpowiedź pozostaw w postaci całki, (e) $r = \sqrt{\theta}$, dla $\pi/6 \leqslant \theta \leqslant \pi/3$, odpowiedź pozostaw w postaci całki,
(f) $r = \cos\theta + \sin\theta$, dla $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

8.3 Zreparametryzuj krzywą określoną przez funkcję o wartościach wektorowych lub wykres funkcji o wartościach liczbowych używając długości łuku s jako parametru:
(a) $2y = 3x - 1$, dla $x \geqslant 0$, (b) $y = 2^{3/2}3^{-3/2}x^{3/2}$, dla $x \geqslant 0$,
(c) $\mathbf{f}(t) = (\frac{1}{2}t, \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2})$, dla $t \geqslant 0$, (d) $y = \int_1^x \sqrt{u^2 - 1}\, du$, dla $x \geqslant 1$,
(e) $y = \sqrt{1 - x^2}$, dla $0 \leqslant x \leqslant 1$.

8.4 Znajdź krzywiznę, promień krzywizny i ewentualne punkty przegięcia krzywych:
(a) $y = e^x$, dla $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$, (b) $y = 1/x$, dla $0 < x < \infty$,
(c) $y = \log x$, dla $0 < x < \infty$. Jaka jest granica $\kappa(x)$ gdy x dąży do 0^+ lub $+\infty$?,
(d) $y = -\log\cos x$, dla $-\pi/2 < x < \pi/2$. Znajdź punkty na krzywej gdzie krzywizna przyjmuje lokalne ekstrema.
(e) $\mathbf{f}(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, dla $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Znajdź punkty na krzywej gdzie krzywizna przyjmuje lokalne ekstrema.
(f) $\mathbf{f}(t) = (e^t, \cos t)$, dla $-\infty < t < \infty$, (g) $\mathbf{f}(t) = (t^3 + t, \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2)$, dla $-\infty < t < \infty$,
(h) $\mathbf{f}(t) = (t^3 - t, t^4)$, dla $-\infty < t < \infty$.

8.5 Pojęcie długości krzywej i jednostkowego wektora stycznego można wprowadzić dla krzywych przestrzennych, odpowiednio modyfikując definicje z wykładu. Znajdź:
(a) Jednostkowy wektor styczny do krzywej zadanej przez $\mathbf{f}(t) = (t^2 + 1, \cos t, e^t)$ w punkcie $(1, 1, 1)$,
(b) Jednostkowy wektor styczny do krzywej zadanej przez $\mathbf{f}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$,
(c) Długość krzywej zadanej przez $\mathbf{f}(t) = (e^t, 2\sqrt{2}e^{t/2}, t)$, dla $0 \leqslant t \leqslant 1$,
(d) Długość krzywej zadanej przez $\mathbf{f}(t) = (\cos^2 t, \cos t \sin t, \sin t)$ dla $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.