

Wykład z analizy

TYDZIEŃ 9.

FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH

ĆWICZENIA

- c9.1 $\phi(x) = \log x$, $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, $\psi(x) = e^x$ i $\lambda(x) = 1/x$. Oblicz następujące wartości
(a) $\lambda(\phi(f(3, 1)))$, (b) $\phi(\psi(f(0, 0)))$, (c) $f(\psi(2), \phi(3))$, (d) $\sqrt{(f(x, x))^2 - 2}$.
- c9.2 Niech $h(s, t) = |1 - s| \cdot |1 - t| - st - |s| - |t| - 1$. Dla jakich s, t zachodzi $h(s, t) = 0$?
- c9.3 Niech $k(a, b) = |a| + |b|$. Naszkicuj wykres funkcji $\theta(t) = k(\sin t, \cos t)$ na płaszczyźnie θ, t .
- c9.4 Jeśli $a(\alpha, \beta) = \arctg(\alpha/\beta)$, i $b(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2$ pokaż, że $\sqrt{b} \sin a = \alpha$ i $\sqrt{b} \cos a = \beta$.
- c9.5 Jeśli $r(m, n) = e^m \cos n$, a $s(m, n) = e^m \sin n$ pokaż, że $(r(m, n))^2 - (s(m, n))^2 = r(2m, 2n)$ i $2r(m, n)s(m, n) = s(2m, 2n)$.
- c9.6 Niech $f(x) = x$ dla $x \geq 0$, $f(x) = 0$ dla $x < 0$, i niech $g(x, y) = x^2 e^y$. Spróbuj uprościć wyrażenie $h(x, y) = g(f(g(x, y)), g(x, y))$.
- c9.7 Podaj, gdzie każda z funkcji jest określona i gdzie jest ciągła.
(a) $x^{-1} + y^{-1}$, (b) $(1 + y^2)/\sin x$, (c) $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|$,
(d) $\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}$, (e) $\sin(x/y)$, (f) $\sin(x \operatorname{tg} y)$,
(g) $|x|^y$, (h) $|x|^{1/|y|}$, (i) $\arctg^{-1}(y/x)$.
(k) $f(x, y) = xy$ dla $x > 0$ i $= 0$ dla $x \leq 0$, (l) $f(x, y) = xy$ dla $x + y > 0$ i $= 0$ dla $x + y \leq 0$.
- c9.8 Podaj gdzie każda z funkcji jest określona, i gdzie jest ciągła
(a) $(y/x) + (x/z) + (z/y)$, (b) $(y/xz) + (x/yz) + (z/xy)$.
- c9.9 Podaj który ze zbiorów jest otwarty, i podaj jego brzeg
(a) Zbiór wszystkich punktów dla których suma współrzędnych jest ujemna,
(b) Zbiór wszystkich punktów których przynajmniej jedna współrzędna jest ujemna,
(c) Zbiór wszystkich punktów których obie współrzędne są dodatnie,
(d) Zbiór wszystkich punktów dla których żadna ze współrzędnych nie jest ujemna.

ZADANIA

- z9.1 Niech A i B będą zbiorami otwartymi. Niech C będzie zbiorem punktów które należą do A lub do B ($A \cup B$) a D będzie zbiorem punktów, które należą i do A i do B ($A \cap B$). Czy C musi być otwarty? Czy D musi być otwarty?
- z9.2 Niech $\{A_1, A_2, \dots\}$ będzie nieskończoną rodziną zbiorów otwartych. Niech E będzie zbiorem punktów, które należą do przynajmniej jednego ze zbiorów A_i , a F będzie zbiorem punktów, które należą do wszystkich A_i . Udowodnij, że E jest otwarty. Pokaż na odpowiednim przykładzie, że F nie musi być otwarty.
- z9.3 Czy zbiór punktów (x, y) takich, że $x^2 + y^2 \neq 1$ jest otwarty? Jaki jest jego brzeg?
- z9.4 Istnieją zbiory, które nie posiadają w ogóle punktów brzegowych. Znajdź wszystkie takie zbiory.